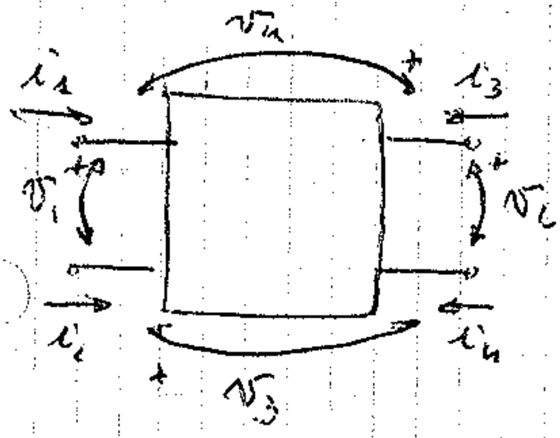
Definiamo $\cos\varphi = \frac{P}{S}$ in un sistema periodico non sinusoidale.

DOPPI BIPOLI



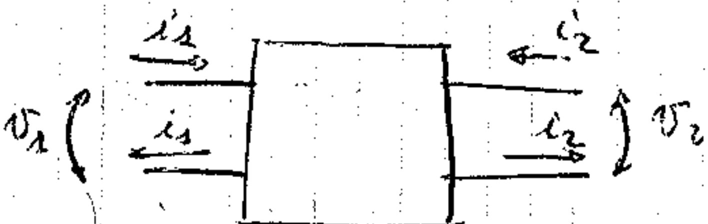
3 correnti linearmente indipendenti.

3 tensioni linearmente indipendenti

Differenze tra quadripolo e doppio bipolo:

- 4 morsetti raggruppati in due gruppi (porte) e ciascun gruppo è caratterizzato da un solo valore di corrente
- I circuiti esterni possono essere connessi soltanto ad una porta.

Quindi un doppio bipolo è caratterizzato da 2 valori di tensioni e da 2 valori di correnti.

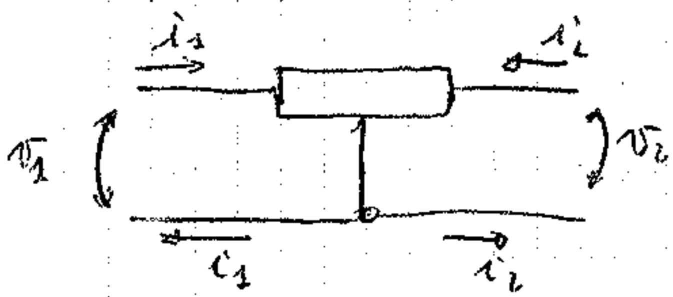


~~Utili~~ Si adotta convenzione UTILIZZATORI

All'interno del doppio bipolo possono esistere al max elementi passivi o generatori pilotati dove il pilota è all'interno del doppio bipolo.

Il doppio bipolo è considerato resistivo (cioè la variabile tempo non interviene in modo esplicito quindi non devono intervenire derivate o integrali nel tempo).

Un qualunque tripolo può essere ricondotto a ~~quadripolo~~ doppio bipolo



Per doppi bipoli ci sono 2 equazioni costitutive.
Prendiamo 2 parametri u_1 e u_2

$$\begin{cases} u_1 = k_{11} w_1 + k_{12} w_2 \\ u_2 = k_{21} w_1 + k_{22} w_2 \end{cases}$$

FORMA DI RAPPRESENTAZIONE IN PARAMETRI Z

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases} \qquad [Z] = [\Omega]$$

Es: mutue induttanze

$$\overline{V}_1 = j\omega L_{11}\overline{I}_1 + j\omega L_{12}\overline{I}_2$$
$$\overline{V}_2 = j\omega L_{12}\overline{I}_1 + j\omega L_{22}\overline{I}_2$$

Trovare z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}

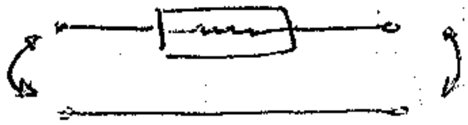
Pongo $i_2 = 0$

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 & i_2 = 0 \\ v_2 = z_{21} i_1 & i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z_{11} = \dfrac{v_1}{i_1}, & i_2 = 0 \\ z_{21} = \dfrac{v_2}{i_1}, & i_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} z_{12} = \left.\dfrac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \\ z_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \end{cases}$$

Non tutti i doppi bipoli accettano la rappresentazione z

Es:



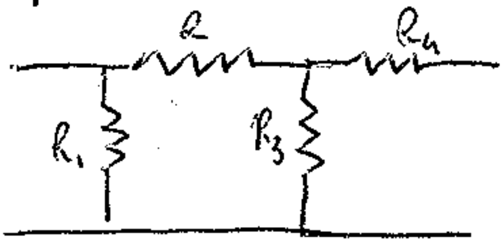
Non accetta rappresentazione z.

Se il bipolo non contiene generatori pilotati z_{12} e z_{21} sono uguali

Utilizzando rappresentazione Z si ha una matrice

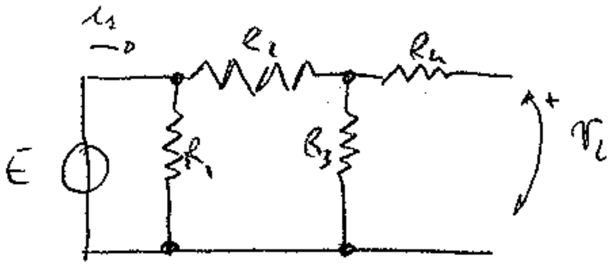
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [v] = [Z][i]$$

Esempio



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

Per calcolare z_{11} e z_{21}, inserisco generatore a sinistra di tensione E e calcolo i_1 e v_2.



$$R_{eq} = (R_2 + R_3) \,//\, R_1 = \frac{2R \cdot \cancel{R}}{3\cancel{R}} = \frac{2}{3} R$$

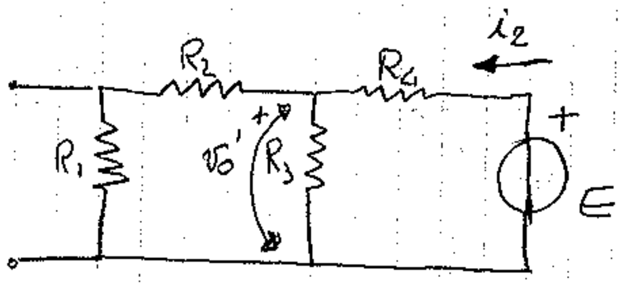
$$i_1 = \frac{E}{R_{eq}} \qquad \underline{z_{11}} = \frac{\cancel{E}}{\cancel{E}/R_{eq}} = \underline{R_{eq} = \frac{2}{3} R}$$

$$v_2 = E \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{E}{2}$$

$$\underline{z_{21}} = \frac{v_2}{E/R_{eq}} = \frac{\cancel{E}/2}{\cancel{E}/R_{eq}} = \underline{\frac{1}{3} R}$$

$$Z_{12} = \frac{v_1'}{i_2}$$

$$Z_{22} = \frac{v_2'}{i_2}$$



$$R_{eq}' = \left[(R_1+R_2) \,//\, R_3\right] + R_4 = \frac{2R^2}{3R} + R = \frac{5}{3}R$$

$$Z_{22} = \frac{v_2'}{i_2'} = \frac{E}{E/R_{eq}'} = R_{eq} = \frac{5}{3}R$$

$$v_0' = E\,\frac{\cancel{R_4 \; R_3 \; (\ldots)} \; \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}}{R_4 + \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}} =$$

$$= \frac{E\,\frac{2}{3}R}{\frac{5}{3}R} = \frac{2}{5}E$$

$$v_1' = v_0\,\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{1}{5}E$$

$$z_{22} = \frac{v_1'}{i_2'} = \frac{E/5}{E/\frac{5}{3}R} = \frac{R}{3}$$

Rappresentazione in parametri y

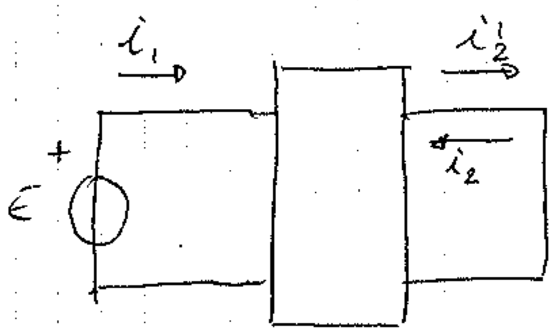
$$\begin{cases} i_1 = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \\ i_2 = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \end{cases}$$

Per il calcolo dei parametri y si alimenta una porta e si mettono in corto circuito i morsetti delle porte non alimentate

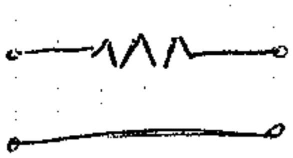
$$y_{11} = \frac{i_1}{v_1} \qquad y_{21} = \frac{i_2}{v_1}$$

$$y_{12} = \frac{i_1}{v_2} \qquad y_{22} = \frac{i_2}{v_2}$$

Tratto schetto :



$$i_2 = -i_2'$$



questo bipolo non ammettere rappresentazione in parametri z, ma la ammette con parametri y.

Relazione tra parametri z e parametri y.

Parametri z : $[v] = [z][i]$

Parametri g: $[i] = [y][v]$

$$[v] = [z][i] = \underbrace{[z][y]}_{[\mathbb{1}]}[v]$$

$$[y] = [z]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(z)} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & +z_{11} \end{bmatrix}$$

Rappresentazione ibride

Rappresentazione h:
$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

Rappresentazione g:
$$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2 \\ v_2 = g_{21} v_1 + g_{21} i_2 \end{cases}$$

h_{11} $[\Omega]$
h_{22} $[S]$

$\begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{21} \end{bmatrix}$ - adimensionali

g_{11} $[S]$
g_{21} $[\Omega]$

$\begin{bmatrix} g_{12} \\ g_{21} \end{bmatrix}$ - adimensionali

$$[g] = [h]^{-1}$$

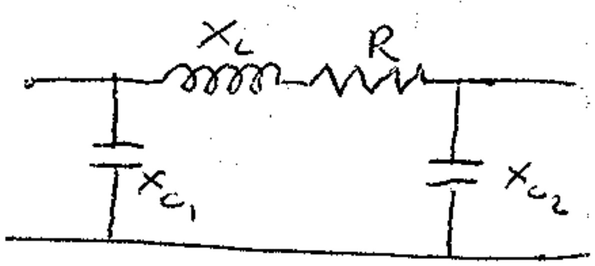
Rappresentazione in parametri di trasmissione

Rappresentazione diretta (T) ed inversa (T')

~~inter~~ $T \begin{cases} v_1 = A v_2 + B(-i_2) \\ i_1 = C v_2 + D(-i_2) \end{cases}$

$T' \begin{cases} v_2 = A'_1 v_1 + B'(-i_1) \\ i_2 = C'_1 v_1 + D'(-i_1) \end{cases}$

Esercizio:



$X_{C_1} = 10\,\Omega$

$X_{C_2} = 6\,\Omega$

$X_L = 6\,\Omega$

$R = 6\,\Omega$

Troviamo A e C $i_2 = 0 \rightarrow$ secondario aperto

$$A = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}$$

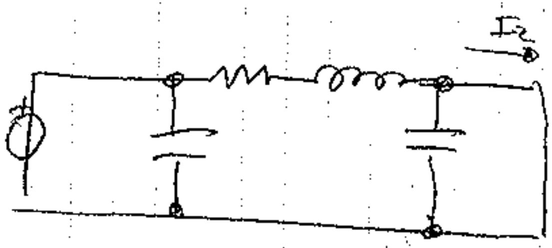
$$\bar{V}_2 = V_1 \frac{j X_{C_2}}{R j (X_L - X_{C_2})} =$$

$$A = T_{11} = \frac{1}{\dfrac{j X_{C_2}}{R + j(X_L - X_{C_2})}} = \frac{R + j(X_L - X_{C_2})}{j(X_{C_2})} = j\,1$$

$$C = T_{21} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} = \frac{V_1\left(\dfrac{1}{-j X_{C_1}} + \dfrac{1}{j(X_L - X_{C_2}) + R}\right)}{\dfrac{j X_{C_2}}{R + j(X_L - X_{C_2})}} =$$

$$= (-0{,}1 + j\,0{,}1667)\ S$$

Troviamo B e D $\quad v_2 = 0$



$$B = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \quad \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_1/(R+jX_L)} = R + jX_L = 6\,(1+j)\,\Omega$$

$$D = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{\cancel{V_1 \cdot \left(\frac{1}{-jX_{C_1}} + \frac{1}{R+jX_L}\right)}}{\cancel{V_1}/(R+jX_L)} = 0{,}4 + j\,0{,}6$$

Relazione tra T e T':

$$[T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [T]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Passaggio da parametri z a parametri T</u>

$$A = \frac{v_1}{v_2}\bigg|_{i_2=0} = \frac{z_{11}\cdot i_1 + z_{12}\, i_2}{z_{21}\, i_1 + z_{22}\, i_2}\bigg|_{i_2=0} = \frac{z_{11}}{z_{21}}$$

$$C = \frac{i_1}{v_2}\bigg|_{i_2=0} = \frac{i_1}{z_{21}\, i_1 + z_{22}\, i_2}\bigg|_{i_2=0} = \frac{1}{z_{21}}$$

$$B = \frac{v_1}{-i_2}\bigg|_{v_2=0} = \frac{z_{11}\, i_1 + z_{12}\, i_2}{-i_2}\bigg|_{v_1=0} \overset{*}{=}$$

$$v_1 = 0 \Rightarrow z_{21}\, i_1 + z_{22}\, i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -\frac{z_{22}}{z_{21}}\, i_2$$

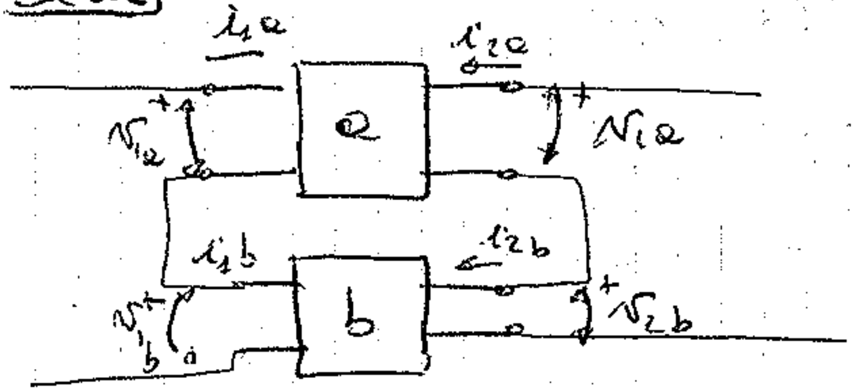
$$\overset{*}{=} \frac{\cancel{i_2}\left(z_{12} - \frac{z_{11}\, z_{22}}{z_{21}}\right)}{-\cancel{i_2}}\bigg|_{v_2=0} = z_{11}\frac{z_{22}}{z_{21}} - z_{12} =$$

$$= \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}{z_{21}} = \frac{\det(z)}{z_{21}}$$

$$D: \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{v_1=0} = \frac{+\frac{z_{22}}{z_{21}} \cancel{i_2}}{+\cancel{i_2}} = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Collegamento tra doppi bipoli

Serie



se $\begin{cases} i_{1a} = i_{1b} \\ i_{2a} = i_{2b} \end{cases}$ allora sono in serie

$$\begin{cases} v_1 = v_{1a} + v_{1b} \\ v_2 = v_{2a} + v_{2b} \end{cases}$$

In parametri z si ha:

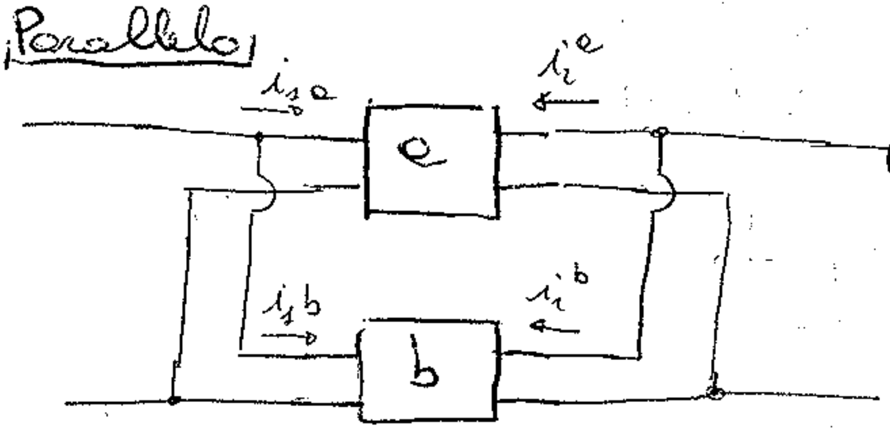
$$v_1 = z_{11}^a i_1^a + z_{12}^a i_2^a + z_{11}^b i_1^b + z_{12}^b i_1^b =$$

$$= (z_{11}^a + z_{11}^b) i_1 + (z_{12}^a + z_{12}^b) i_2$$

$$v_2 = z_{21}^a i_1^a + z_{22}^a i_2^a + z_{21}^b i_1^b + z_{22}^b i_2^b =$$

$$= (z_{21}^a + z_{21}^b) i_1 + (z_{22}^a + z_{22}^b) i_2$$

Parallelo:



$$\begin{cases} v_1^a = v_1^b = v_1 \\ v_2^a = v_2^b = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = i_1^a + i_1^b \\ i_2 = i_2^a + i_2^b \end{cases}$$

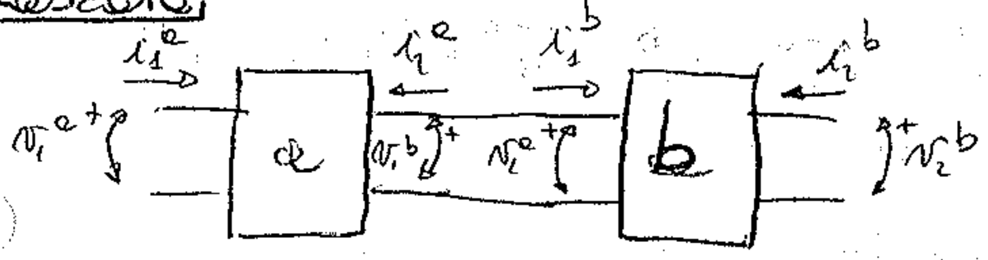
Forma più conveniente: parametri y

$$i_1 = i_1^a + i_1^b = v_1^a y_{11}^a + y_{12}^a v_2^a + y_{11}^b v_1^b + y_{12}^b v_1^b =$$

$$= (y_{11}^a + y_{11}^b) v_1 + (y_{12}^a + y_{12}^b) v_2$$

$$i_2 = (y_{21}^a + y_{21}^b) v_1 + (y_{22}^a + y_{22}^b) v_2$$

Cascata:



$$v_1 = v_1^a \qquad v_2^b = v_2 \qquad v_1^b = v_2^a$$

$$i_1 = i_1^a \qquad i_2 = i_2^b \qquad i_2^a = -i_1^b$$

Forma più conveniente: parametri T

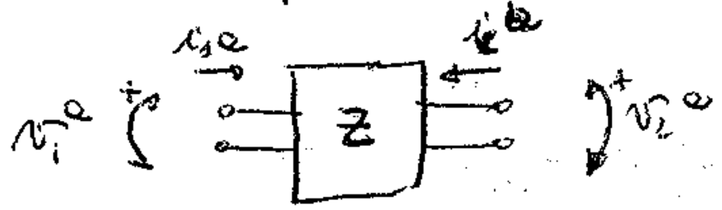
$$\begin{bmatrix} v_1^a \\ i_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^a \\ -i_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ i_1^b \end{bmatrix}$$

$$= \left[T^a \right] \begin{bmatrix} A^b & B^b \\ C^b & D^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^b \\ -i_2^b \end{bmatrix} =$$

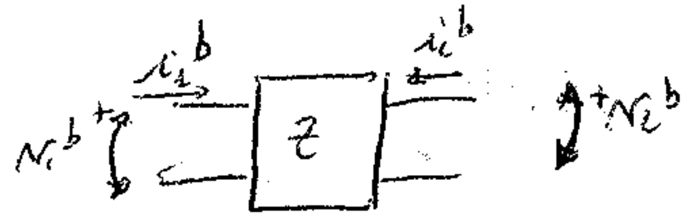
$$= \left[T^a \right] \left[T^b \right] \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Proprietà caratteristiche dei doppi bipoli

1) Reciprocità:



Cambio condizione di configurazione



Se vale $v_1^a \cdot i_1^b + v_2^a \cdot i_2^b = v_1^b i_1^a + v_2^b i_2^a$
il doppio bipolo è reciproco

$\cancel{v_1^a = z_{11}^a i_1^a + z_{12} i_2^b}$ Esplicito: v_1 e v_2

$$z_{11}\cancel{i_1^a i_1^b} + z_{21} i_1^a i_2^b + = z_{11}\cancel{i_1^b i_1^a} + z_{21} i_1^b i_2^a +$$
$$+ z_{12} i_2^a i_1^b + z_{22}\cancel{i_2^a i_2^b} \qquad + z_{12} i_2^b i_1^a + z_{22}\cancel{i_2^b i_2^a}$$

$$z_{12} i_2^a i_1^b + z_{21} i_1^a i_2^b = z_{21} i_1^b i_2^a + z_{12} i_2^b i_1^a$$

Perché la condizione valga bisogna che

$$z_{12} = z_{21}$$

Questa condizione vale solo per rappresentazione Z la reciprocità è intrinseca nel doppio bipolo

e non dipende dalla rappresentazione.

Se un bipolo non contiene generatori pilotati all'interno è sicuramente reciproco.

2) Se $\left.\begin{array}{l} v_1^B = v_2^A \\ i_1^B = i_2^A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} i_2^B = i_1^A \\ v_2^B = v_1^A \end{array}$ Allora il bipolo è simmetrico

$$z_{11} i_1^b + z_{12} i_2^b = z_{22} i_2^A + z_{21} i_1^A$$

$$z_{11} i_2^A + z_{12} i_1^A = z_{22} i_2^A + z_{21} i_1^A$$

Devono valere contemporaneamente $\begin{cases} z_{11} = z_{22} \\ z_{12} = z_{21} \end{cases}$

la proprietà ~~intrinse~~ di simmetria è intrinseca nel doppio bipolo.

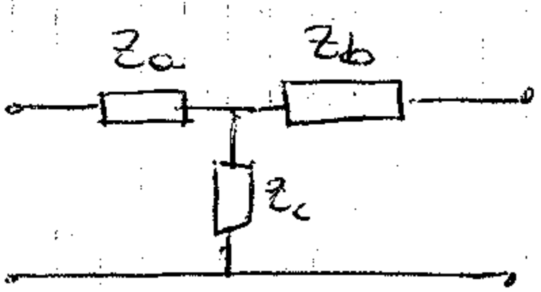
3) PASSIVITÀ

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

Se $p \geq 0$ il bipolo è passivo cioè assorbe potenza dal resto della rete.

Definizione della struttura di un doppio conoscendo i parametri

Struttura a T



Noi conosciamo:

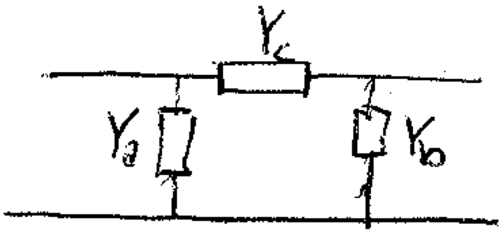
$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{11} = \left.\dfrac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = Z_A + Z_C \\[2ex] z_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = Z_b + Z_c \\[2ex] z_{21} = \left.\dfrac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = Z_c \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} Z_A = z_{11} - z_{21} \\ Z_B = z_{22} - z_{21} \\ Z_c = z_{21} \end{cases}$$

Struttura a π

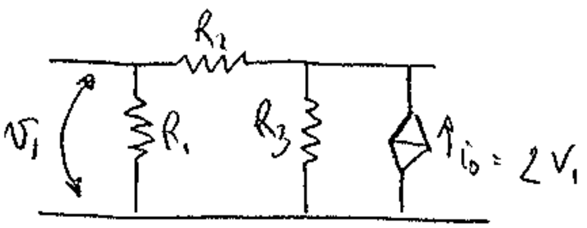


$$\begin{cases} i_1 = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \\ i_2 = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} = Y_A + Y_C \\ y_{22} = \left.\dfrac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} = Y_B + Y_C \\ y_{12} = \left.\dfrac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} = -Y_C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_A = y_{11} + y_{12} \\ Y_B = y_{22} + y_{12} \\ Y_C = -y_{12} \end{cases}$$

Esercizio

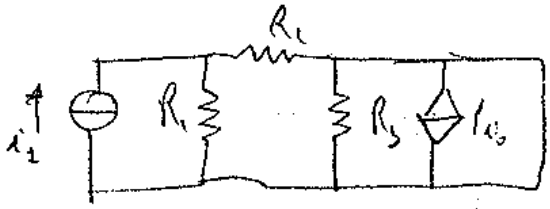


Trovare rappresentazione in parametri h

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 3\ \Omega$

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{v_2=0}$$

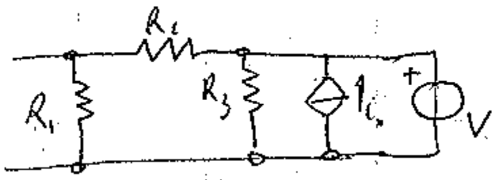


$$v_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\, i_1 = \frac{2}{3}\, i_1 \qquad h_{11} = \frac{2}{3}\ \Omega$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}\Big|_{v_2=0} = -\frac{5}{3} \qquad i_2 = -i_1 \frac{R_1}{R_1+R_2} - i_0 =$$

$$= -i_1 \frac{1}{3} - \frac{4}{3} i_1 = -\frac{5}{3} i_1$$

$$h_{12} = \frac{v_1}{v_2}\Big|_{i_1=0} = \frac{1}{3}$$



$$h_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{i_1=0} = 0$$

$$v_2 = V$$

$$v_1 = V \frac{R_1}{R_1+R_2} = v_2\, \frac{1}{3}$$

$$i_2 = \frac{V}{R_3} + \frac{V}{R_1+R_2} - i_0 = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2}{3} - 2V_1 = 0\ A$$