Dato il sistema tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

in cui:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6 & -14 \\ 0 & -15 & 10 & 32 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.25 & -0.25 & -4.75 \\ 1 & 2 & 0.5 & -3 \end{pmatrix}$$

Si richiede:

1. Dire quali sono gli autovalori del sistema e discuterne la stabilità secondo Lyapunov
2. Scrivere le funzioni di trasferimento per la prima e la seconda uscita e discutere la BIBO stabilità del sistema.
3. Indicare la dimensione dello spazio di osservabilità per l'uscita 1
4. Indicare la dimensione dello spazio di osservabilità per l'uscita 2
5. Indicare la dimensione dello spazio di controllabilità
6. Dire quali sono gli autovalori non osservabili dall'uscita 1
7. Dire quali sono gli autovalori non osservabili dall'uscita 2
8. Dire quali sono gli autovalori non controllabili
9. Indicare la dimensione dello spazio di controllabilità e osservabilità per l'uscita 1
10. Indicare la dimensione dello spazio di controllabilità e osservabilità per l'uscita 2
11. Dire se è possibile realizzare una retroazione degli stati misurati in modo che il sistema retroazionato sia stabile e abbia costante di tempo ≤ 0.2 s
12. Dire se è possibile realizzare una retroazione degli stati osservati dall'uscita 2 in modo che il sistema retroazionato sia stabile e abbia costante di tempo ≤ 0.4 s

Svolgimento:

N.B: le scritte in corsivo sono da intendersi come comandi da digitare su Matlab.

1) Per sapere gli autovalori del sistema digitiamo su Matlab il comando *eig(A),* e otteniamo i valori: -4, -3, 1, 5.
   Poiché due autovalori sono maggiori di zero allora il sistema è instabile secondo Lyapunov.

2) Per scrivere le funzioni di trasferimento utilizziamo i seguenti comandi:
   - Dividiamo la matrice C in due parti C1 e C2 che corrispondono rispettivamente alle uscite 1 e 2. Scriviamo quindi i comandi *C1 = C(1, :)* e *C2 = C(2, :).*
   - *[n1,d1] = ss2tf(A, B, C1, 0, 1)*
   - *W1 = tf (n1, d1)*
   - *W1 = minreal (W1)*, W ora è la funziona di trasferimento relativa alla prima uscita
   - Stesso procedimento per la seconda uscita (si sostituisce 2 a 1)

   Otteniamo quindi i seguenti sistemi:

$$W1 = \frac{4s^2 - 8s - 28}{s^3 - 3s^2 - 13s + 15} \text{ e } W2 = \frac{3s - 7}{s^2 - 6s + 5}.$$

   Poiché gli autovalori del sistema non sono tutti < 0. Allora il sistema è BIBO instabile. Un altro metodo per verificare la BIBO stabilità è quello di verificare le radici del denominatore della fdt: se queste sono negative il sistema è BIBO stabile. Si può quindi procedere in questo modo: Si digita il comando *roots([1, -3, -13, 15])*, si ottengono i valori: -3 1 5 quindi il sistema è BIBO instabile.

3) Digitiamo il comando *rank(obsv(A,C1))*, il risultato ci fornisce la dimensione dello spazio di osservabilità per l'uscita 1. La dimensione è 3.

4) Lo stesso procedimento del punto 3 (si cambia 1 con 2). La dimensione è 3.

5) Digitiamo il comando *rank(ctrb(A,B))*, il risultato ci fornisce la dimensione dello spazio di controllabilità. La dimensione è 3.

6) Digitiamo il comando *[Ab, Bb, Cb, T] = obsvf(A,B,C1)*, ci vengono fornite 4 matrici, a noi possono interessare solo Ab, Cb e T. Per svolgere questo punto ci interessa solo Ab.
La matrice Ab è di questo tipo: $Ab = \begin{bmatrix} NOss & numeri \\ 0 & Oss \end{bmatrix}$, a noi interessano gli autovalori della parte non osservabile, digitiamo il comando
eig(Ab(1:n°autovalori non osservabili, 1:n°autovalori non osservabili)).
In questo caso c'è solo un autovalore non osservabile ed –4.

7) Facciamo lo stesso procedimento per il punto 6 (cambiamo 1 con 2) . L'autovalore non osservabile è –3

8) Digitiamo il comando *[Ab, Bb, Cb, T] = ctrbf(A,B,C)*, ci vengono fornite 4 matrici, a noi possono interessare solo Ab, Bb e T. Per svolgere questo punto ci interessa solo Ab.
La matrice Ab è di questo tipo: $Ab = \begin{bmatrix} NCtrb & 0 \\ numeri & Ctrb \end{bmatrix}$, a noi interessano gli autovalori della parte non controllabile, digitiamo il comando
eig(Ab(1:n°autovalori non controllabili, 1:n°autovalori non controllabili)).
In questo caso c'è solo un autovalore non controllabile ed –4.

9) La dimensione dello spazio di controllabilità e osservabilità dell'uscita 1 è dato dal grado del denominatore della fdt relativa all'uscita 1, in questo caso 3.

10) La dimensione dello spazio di controllabilità e osservabilità dell'uscita 2 è dato dal grado del denominatore della fdt relativa all'uscita 2, in questo caso 2

11) In questo caso è sicuramente effettuabile una retroazione degli stati misurabili perché l'unico autovalore non controllabile è –4 (è negativo quindi il sistema può essere reso stabile). Tuttavia noi dobbiamo far si che abbia costante di tempo minore a 0.2s. La costante di tempo è definita così: $\tau = \frac{1}{|autovalore|}$, in questo caso $\tau = \frac{1}{4} = 0.25 > 0.2$. Quindi non è possibile realizzare una retroazione degli stati misurabili in modo che il sistema retroazionato abbia costante di tempo inferire a 0.2 s

12) In questo caso è sicuramente effettuabile una retroazione degli stati misurabili perché l'unico autovalore non osservabile è –3 (è negativo quindi il sistema può essere reso stabile). Tuttavia noi dobbiamo far si che abbia costante di tempo minore a 0.4s. In questo caso la costante di

tempo $\tau = \frac{1}{3} = 0.33 < 0.4$. Quindi è possibile realizzare una retroazione degli stati misurabili in modo che il sistema retroazionato sia stabile e abbia costante di tempo inferire a 0.4 s