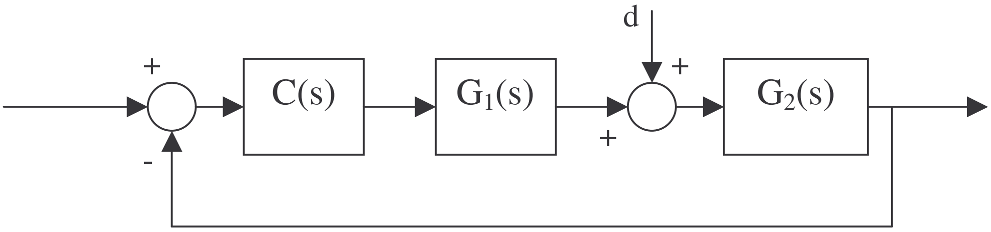
Dato un sistema di controllo rappresentabile con il seguente schema:



In cui:

$$G_1 = \frac{15}{s+8} \qquad \text{e } G_2 = \frac{1000}{s+130}$$

Si richiede che il sistema retroazionato, oltre ad essere stabile, soddisfi le seguenti specifiche:

- Sia astatico rispetto al disturbo d costante
- Abbia un errore di regime permanente inferiore al 0,08% per ingressi sinusoidali con pulsazione $\omega \leq 0{,}2$ rad/s
- Gli ingressi sinusoidali con pulsazione $\omega \geq 450$ rad/s siano attenuati a valori inferiori allo 0,5%
- La pulsazione di taglio sia tale che $\omega_c > 24$ rad/s
- Abbia un margine di fase $m_\varphi \geq 45°$

Si richiede:

1. Determinare un compensatore C(s) che soddisfi le specifiche richieste e scriverlo fattorizzato in forma di costanti di tempo.
2. Motivare brevemente la scelta effettuata indicando anche le prestazioni del sistema retroazionato valutate in termini di poli, risposta in frequenza, e risposta al gradino.

Svolgimento:

N.B: le scritte in corsivo sono da intendersi come comandi da digitare su Matlab.

Per prima cosa dobbiamo crearci le funzioni di trasferimento su Matlab, per far ciò:

- creare una funzione di trasferimento *s = tf([1,0] , [1])*;
- ora possiamo creare G1 e G2 digitando: *G1 = 15/(s+8)* e *G2 = 1000/(s+130)*
- la funzione G sarà: *G = G1 * G2*;

Affinché il sistema sia astatico rispetto al disturbo d costante è necessario che prima del disturbo ci sia un polo in zero. Poiché prima del disturbo non c'è nessun polo in zero allora lo inseriamo nel compensatore, in particolare creiamo *C1 = 1/s*.
Dobbiamo ora verificare che il diagramma di Bode della funzione passi sopra al valore 1250 (100/0,08) per ogni pulsazione $\omega \leq 0{,}2$ rad/s. Utilizziamo quindi il comando:

*[m,f] = bode (C1*G, 0.2)*

e otteniamo i valori m = 72.093 e f = -91.52°.

Noi vogliamo che m = 1250; quindi dobbiamo moltiplicare C1 per un coefficiente K = 1250 / 72.093 = 17.33. Poiché vogliamo avere un margine di sicurezza imponiamo *K = 20*.
Ora aggiorniamo il valore di C1: scriviamo su Matlab *C1 = C1 * K*.

Ora occupiamoci del margine di fase: noi desideriamo che ad una pulsazione di circa 24 rad/s la fase sia maggiore di (–180° + 45°) = 135°.
Digitiamo quindi il comando: *[m,f] = bode(C1*G, 24)*, ed otteniamo come risultati: m = 3.74 ed f = -172.03°. Vogliamo quindi che la fase aumenti di 172.03 – 135 = 37.03°. Per alzare la fase utilizziamo una rete derivatrice che chiameremo C2.
Osservando i diagrammi universali di Bode e Nycols (che possono essere trovati al sito http://digilander.libero.it/elettrix01/ing_controlli.htm) possiamo notare che per m = 8 e $\omega\tau$ = 1.5 la fase viene alzata di circa 45°, cioè in modo più che sufficiente.
Definiamo quindi su Matlab i seguenti parametri:
wt2 = 1.5 ($\omega\tau$), *m2 = 8, wc = 25* (ω_c).
Ora dobbiamo ricavarci la posizione dello zero della rete derivatrice. Per ricavarci lo zero facciamo i seguenti passaggi:
- *t2 = wt2 / wc* = 0.06 dove ricaviamo tau.
- *w2 = 1/t2* = 16.7 lo zero della rete derivatrice
- *mw2 = w2 * m* = 133.3 il valore del polo della rete derivatrice

ora per creare la rete non ci resta che scrivere il comando:

C2 = (s/w2 + 1) / (s/mw2 + 1)

Ora battiamo il comando *margin(C2*C1*G)* su Matlab. Con questo comando otteniamo i valori della pulsazione di taglio e del margine di fase e di guadagno. In questo caso abbiamo che:
m_φ = 14.161° e ω_c = 93.178 rad/s.
A noi interessa un margine di fase maggiore di 45° ad una pulsazione molto minore. Dobbiamo quindi inserire una rete integratrice (C3).
Per prima cosa dobbiamo capire di quanto deve essere abbassato il modulo della funzione di trasferimento C2*C1*G, battiamo quindi il comando *[m,f] = bode (C2*C1*G, 25)*. Si otterranno i seguenti risultati: m = 6.11 e f = -127.51.
Scegliamo quindi l'alfa della rete integratrice pari a 6.25 che è leggermente maggiore di 6.11 in modo da tenere la pulsazione di taglio tra 24 e 25 rad/s.
Inoltre scegliamo che lo zero della rete integratrice si trovi una decade prima dello zero della rete derivatrice, cioè a 2.5 rad/s.
Digitiamo quindi i seguenti comandi:
- *alfa3 = 6.25* (l'alfa della rete integratrice)
- *alfaw3 = 2.5* (lo zero della rete integratrice)
- *w3 = alfaw3 / alfa3* = 0.4 (il polo della rete integratrice)
- *C3 = (s/alfaw3 + 1) / (s/w3 + 1)*

Verifichiamo ora che la pulsazione di taglio sia maggiore o uguale a 24 rad/s e il margine di fase sia maggiore di 45°. Utilizziamo, quindi, il comando *margin(C3*C2*C1*G)* ed otteniamo i seguenti valori: m_φ = 47.8° > 45° e ω_c = 24.66 rad/s.

Non ci resta che verificare che per pulsazioni maggiori a 450 rad/s il modulo di C3*C2*C1*G sia minore di 0.005 (0,5/100). Utilizziamo il comando *[m,f] = bode (C3*C2*C1*G, 450)*, otteniamo m= 0.0039, cioè la specifica è soddisfatta.

Per sicurezza verifichiamo ancora la seconda specifica, digitiamo il comando *[m,f] = bode (C3*C2*C1*G, 0.2)* ed otteniamo m = 1294 >1250, cioè la specifica è soddisfatta.

Il compensatore risulta essere quindi:

$$C = C1 * C2 * C3 = \frac{20\left(\frac{s}{16.7}+1\right)\left(\frac{s}{2.5}+1\right)}{s\left(\frac{s}{133.3}+1\right)\left(\frac{s}{0.4}+1\right)}$$

Per quanto riguarda la seconda richiesta è necessario analizzare la funzione di trasferimento anello chiuso, in particolare ci interessano:
- i poli complessi coniugati ed il loro smorzamento
- la banda passante e la pulsazione di picco per quanto riguarda la risposta in frequenza
- la percentuale di overshoot, il tempo di assestamento, il tempo di salita ed il tempo di ritardo per quanto concerne la risposta al gradino.

Per fare tutto ciò utilizziamo i seguenti comandi:
- W = feedback (C3*C2*C1*G ,1), restituisce la funzione di trasferimento anello chiuso
- damp(W), restituisce i poli della funzione di trasferimento ed il relativo smorzamento
- bode(W), restituisce la risposta in frequenza
- step(W), restituisce la risposta al gradino

I risultati dell'esercizio sono i seguenti:
- poli complessi coniugati: -16.2 ±17.9 con smorzamento 0.67
- pulsazione di banda pari a 42,7 rad/s
- pulsazione di picco di circa 18.3 rad/s con picco massimo di 2.46 dB
- percentuale di overshoot 26.2%
- tempo di assestamento 0.247 s
- tempo di salita 0.0437s
- tempo di ritardo 0.0308 s