

# APPUNTI DI CALCOLO NUMERICO

## Equazioni non lineari: problema di punto fisso Sistemi di equazioni non lineari

### Introduzione

Il problema di punto fisso è un problema che si presenta spesso in moltissime applicazioni. Esso può presentarsi “da solo”, ossia come richiesta specifica di un problema da risolvere, oppure si può presentare come riformulazione di una equazione non lineare  $f(x)=0$ .

Si può dimostrare che è sempre possibile ricondurre una equazione non lineare ad un problema di punto fisso. E lo si può fare in infiniti modi.

Ovviamente, di tutti questi infiniti modi di riformulare una equazione non lineare, alcuni sono migliori di altri. In altre parole, è possibile definire riformulazioni “buone” e “non buone” in base a come esse possano portare a metodi numerici iterativi rispettivamente convergenti o non convergenti.

Una definizione del tutto generale del problema di punto fisso è la seguente: data una funzione di variabile reale a valori reali  $\phi: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ , determinare una  $x$  tale che si abbia  $\phi(x)=x$ . Graficamente significa determinare le intersezioni tra il grafico di  $\phi(x)$  e la retta  $y=x$ , bisettrice del primo e del terzo quadrante.

### Metodo delle iterate successive

Chiamato anche metodo delle iterazioni di punto fisso, il metodo delle iterate successive si basa sulla seguente regola: dato  $x_0$

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

per  $k = 0, 1, \dots$ . Dal punto di vista computazionale, il metodo richiede solamente la valutazione della funzione  $\phi(x)$  nei punti della successione.

Si possono verificare quattro differenti situazioni:

- convergenza monotona;
- convergenza non monotona;
- divergenza monotona;
- divergenza non monotona.

Il verificarsi di una di queste quattro situazioni dipende dal segno e dal modulo della derivata prima della funzione nel punto fisso:

- segno positivo e modulo strettamente maggiore di 1: divergenza;
- segno positivo e modulo strettamente minore di 1: convergenza;
- segno negativo e modulo strettamente maggiore di 1: divergenza;
- segno negativo e modulo strettamente minore di 1: convergenza.

È necessario ora dare qualche definizione:

- convergenza monotona: significa che la successione generata dal metodo delle iterate successive è convergente e che i vari termini  $x_k$  si trovano tutti dalla stessa parte rispetto al punto fisso, ossia che le approssimazioni fornite dal metodo sono o tutte per eccesso o tutte per difetto.
- convergenza non monotona: significa che la successione generata dal metodo delle iterate successive è convergente e che i vari termini  $x_k$  si trovano alternativamente a destra o a sinistra del punto fisso, ossia che le approssimazioni fornite dal metodo sono alternativamente per difetto e per eccesso.
- divergenza monotona: significa che la successione generata dal metodo delle iterate successive non è convergente e che, comunque, tutte le approssimazioni fornite dal metodo sono o per difetto o per eccesso.
- divergenza non monotona: significa che la successione generata dal metodo delle iterate successive non è convergente e che, comunque, tutte le approssimazioni fornite dal metodo sono alternativamente per eccesso e per difetto.

Il seguente teorema fornisce una condizione di esistenza di un punto per cui il metodo delle iterate successive converge:

*Teorema*: se  $|\phi'(x^*)| < 1$ , dove  $x^*$  è il punto fisso, esiste un intorno  $I$  di  $x^*$  tale che la successione  $\{x_k\}$  converge se  $x_0 \in I$ . Se viceversa  $|\phi'(x^*)| > 1$ , allora il metodo delle iterate successive non può convergere.

*Osservazione*: questo teorema non dice nulla riguardo alle caratteristiche dell'intorno  $I$ . Inoltre, generalmente, non si conosce il punto fisso. Sfruttando la localizzazione del punto fisso è possibile ricavare le informazioni su segno e modulo della derivata prima anche se il punto fisso non è noto.

Il teorema che segue fornisce delle condizioni per definire meglio questo intorno:

*Teorema di convergenza globale*: se, dato un intervallo  $[a, b]$  (che può essere l'intervallo di localizzazione del punto fisso) si verifica che

- $\phi \in C^1[a, b]$
- $\phi: [a, b] \mapsto [a, b]$  cioè se  $x \in [a, b] \Rightarrow \phi(x) \in [a, b]$
- $\exists K < 1$  tale che  $|\phi'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$

allora esiste uno e un solo punto fisso in  $[a, b]$  e il metodo delle iterate successive converge ad esso  $\forall x_0 \in [a, b]$ .

## Velocità di convergenza

L'ordine di convergenza del metodo delle iterate successive dipende dalla forma della funzione, ossia dalla sua regolarità.

Sia  $\phi \in C^m[a, b]$  per un qualche  $m > 1$ . L'errore al passo  $k + 1$  è dato da

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$$

dove  $x_{k+1}$  è l'approssimazione corrente del punto fisso e  $x^*$  è la soluzione esatta (il punto fisso). Dalla definizione del metodo delle iterate successive si ha

$$\begin{aligned} x^* &= \phi(x^*) \\ x_{k+1} &= \phi(x_k) \end{aligned}$$

e sostituendo nell'espressione dell'errore si ricava

$$e_{k+1} = \phi(x_k) - \phi(x^*).$$

Sviluppando ora il termine  $\phi(x_k)$  in serie di Taylor, centrata in  $x^*$  e calcolata in  $x_k$ , si ottiene

$$\phi(x_k) \cong \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \dots + \frac{1}{m!} \phi^{(m)}(x^*)(x_k - x^*)^m$$

e dato che  $x_k - x^* = e_k$

$$\phi(x_k) \cong \phi(x^*) + \phi'(x^*)e_k + \dots + \frac{1}{m!} \phi^{(m)}(x^*)e_k^m$$

e quindi

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \phi(x_k) - \phi(x^*) \cong \phi'(x^*)e_k + \dots + \frac{1}{m!} \phi^{(m)}(x^*)e_k^m.$$

Se  $\phi'(x^*) \neq 0$  è possibile trascurare tutti i termini di grado superiore al primo, allora

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \cong \phi'(x^*)$$

e se inoltre  $\phi'(x^*) < 1$ , cosa verificata in quanto si richiede la convergenza, allora l'ordine di convergenza è 1.

In generale, se  $\phi^{(i)}(x^*) = 0$ , per  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , e  $\phi^{(m)}(x^*) \neq 0$  allora

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \cong \frac{1}{m!} \phi^{(m)}(x^*)$$

e l'ordine di convergenza è  $m$ .

L'ordine di convergenza del metodo delle iterate successive è pari al grado della prima derivata che non si annulla nel punto fisso.

*Teorema:* se  $\phi^{(i)}(x^*) = 0$  per  $i = 1, 2, \dots, m-1$  e  $\phi^{(m)}(x^*) \neq 0$  allora l'ordine di convergenza è  $m$ . In particolare, se l'ordine è 1, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \phi'(x^*).$$

In conclusione si può aggiungere che, a parità di ordine di convergenza, quanto più piccolo è il modulo della derivata prima della funzione calcolata nel punto fisso  $|\phi'(x^*)|$ , tanto più rapida è la convergenza del metodo.

## Generalizzazione ai sistemi di equazioni non lineari

Si supponga di dover risolvere un sistema di due equazioni non lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1^2 + x_2^2 = 5 \end{cases}$$

che può essere riscritto in questo modo

$$\begin{cases} \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 1 \\ \frac{x_1^2}{5} + \frac{x_2^2}{5} = 1 \end{cases}$$

in cui si individuano l'equazione di una retta passante per i punti  $(3,0)$  e  $(0, \frac{3}{2})$  e quella di un'ellisse di semiasse orizzontale  $\sqrt{\frac{5}{2}}$  e semiasse verticale  $\sqrt{5}$ .

Per risolvere il sistema è possibile considerare un problema di punto fisso, generalizzando il metodo delle iterate successive.

Sia  $\phi: \mathfrak{R}^m \mapsto \mathfrak{R}^m$  la funzione utile per il metodo delle iterate successive. Essa può essere espressa nella seguente forma:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Dato un vettore dei punti iniziali  $x_0 \in \mathfrak{R}^m$  il metodo delle iterate successive nel caso vettoriale si basa sul seguente algoritmo:

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

dove  $x^{(k+1)}$  rappresenta la stima corrente del vettore soluzione, mentre  $x^{(k)}$  è la stima al passo precedente.

Come criterio di arresto si può utilizzare quanto si è detto nel caso di una sola variabile, sostituendo i moduli dei termini con norme di vettori:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \text{tolleranza}.$$

Per ciò che riguarda la convergenza del metodo delle iterate successive, valgono i teoremi visti per le equazioni non lineari in una sola variabile. L'unica modifica da apportare ad essi è che in questo caso la condizione di convergenza è

$$\|J_\phi(x^*)\| < 1$$

## Metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari

Per risolvere il sistema iniziale è possibile applicare anche il metodo di Newton, generalizzato alle funzioni di più variabili. In una sola variabile si ha

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

dallo sviluppo in serie di Taylor, centrato in  $x_k$  e arrestato al primo ordine

$$f(x) \cong f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

della funzione. Risolvendo successivamente la seguente equazione si ottiene

$$f(x_k) - f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

chiamando  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

$$f(x_k) - f'(x_k)\Delta x_k = 0 \Rightarrow \Delta x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

che è esattamente la formula del metodo di Newton.

In modo del tutto analogo è possibile trattare le funzioni di più variabili. Per prima cosa lo sviluppo di Taylor di una funzione  $f: \mathfrak{R}^m \mapsto \mathfrak{R}^m$  centrato in  $x_0 \in \mathfrak{R}^m$  e arrestato al primo ordine è il seguente

$$f(x) \cong f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$$

dove  $J_f(x)$  è la matrice Jacobiana di  $f$ . Questa è una matrice che contiene le derivate di tutte le componenti della funzione  $f$  rispetto ad ogni variabile  $x_j$ . In pratica, l'elemento di posto  $ij$  della matrice è la derivata parziale della componente  $i$ -esima della funzione rispetto alla variabile  $j$ -esima:

$$[J_f(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

*Esempio:*

Si consideri la seguente funzione

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 5 \end{pmatrix}$$

e se ne calcoli la matrice Jacobiana.

Una regola pratica per calcolare le derivate parziali è la seguente: derivare la funzione rispetto alla variabile considerata, trattando le altre variabili come se fossero delle costanti; compiere questo ragionamento per tutte le variabili e per ciascuna componente della funzione.

In sostanza per un generico sistema  $m \times m$  ( $m$  equazioni in  $m$  incognite) si devono calcolare  $m^2$  derivate parziali. Già con dimensioni ridotte, come  $4 \times 4$ , diventa conveniente implementare su un computer un metodo numerico per approssimare tali derivate, e non calcolarle manualmente!

Calcolo della matrice Jacobiana:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Procedendo in maniera analoga a quanto si è fatto per le funzioni di una sola variabile si ha

$$\begin{aligned} f(x_0) + J_f(x_0)(x_1 - x_0) &= 0 \\ J_f(x_0) \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x_0} &= -f(x_0) \end{aligned}$$

ossia si ottiene un sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti pari alla matrice Jacobiana della funzione.

Per il primo passo si ha 
$$\begin{cases} J_f(x_0)\Delta x_0 = -f(x_0) \\ x_1 = x_0 + \Delta x_0 \end{cases}.$$

Per un passo generico si ha 
$$\begin{cases} J_f(x_k)\Delta x_k = -f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \end{cases}.$$

Per la convergenza del metodo di Newton valgono le considerazioni fatte a proposito delle funzioni un una sola variabile. N.B.: continua ad essere critica la scelta di un vettore di punti iniziali per cui si abbia la convergenza del metodo.