©Maxwell 2012

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1: equazioni non lineari.

Dopo aver localizzato le soluzioni dell'equazione non lineare $f(x) = x^3 - x - 5 = 0$ studiare la convergenza del metodo di punto fisso $x_{k+1} = \phi(x_k)$ con $k = 0,1,\ldots$ applicato alle funzioni

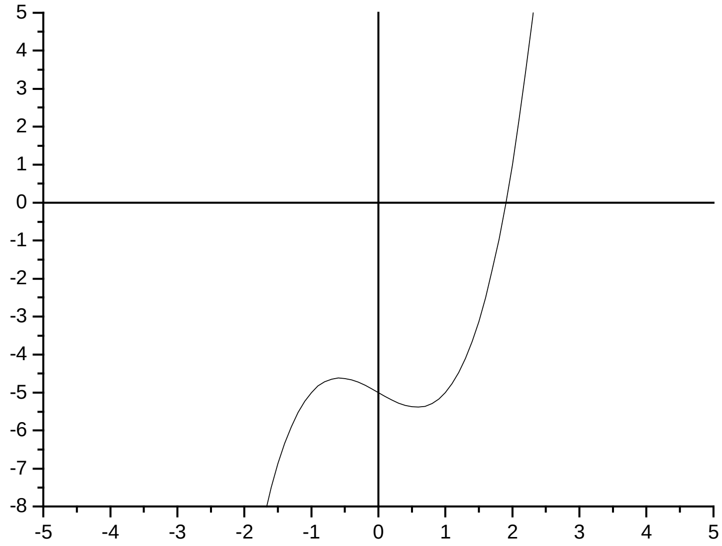
1. $\phi(x) = x^3 - 5$;
2. $\phi(x) = (x+5)^{1/3}$;
3. $\phi(x) = \dfrac{2x^3+5}{3x^2-1}$;

per determinare le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Soluzione:

Localizzazione:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 < 0$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 < 0$$



$f(1) = 1 - 1 - 5 < 0$
$f(2) = 8 - 2 - 5 > 0$

Quindi $x^* \in (1,2)$.

La prima funzione è $\Phi(x) = x^3 - 5$. La sua derivata è $\Phi'(x) = 3x^2$.
Quanto vale $|\Phi'(x^*)|$? Non si conosce il valore esatto della derivata prima calcolata in x^*. Tuttavia si conosce l'andamento della derivata prima e si può affermare che per $x^* \in (1,2)$ si ha sicuramente $3 < 3(x^*)^2 < 12$. Per questo motivo, dato che $|\Phi'(x^*)|$ è strettamente maggiore di 1, non può esserci convergenza (assicurata, invece, per $|\Phi'(x^*)|$ minore di 1).

La seconda funzione è $\Phi(x) = (x+5)^{1/3} = \sqrt[3]{x+5}$ ed ha derivata $\Phi'(x) = \frac{1}{3}(x+5)^{-2/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}$. Nel campo di variazione di x^* si ha $36 < (x^*+5)^2 < 49$.
Quindi sicuramente $3\sqrt[3]{(x^*+5)^2} > 1$. Di conseguenza $\Phi'(x^*) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^*+5)^2}} < 1$ e può esserci convergenza, a patto di trovare un buon punto iniziale.

Per trovare un buon punto iniziale si studia l'intervallo $[a,b] = [1,2]$:

- $\Phi \in C^1[a,b]$ perché l'unico punto di non derivabilità di $\Phi(x)$, $x = -5$, non appartiene all'intervallo $[a,b]$;
- $\Phi : [1,2] \mapsto [1,2]$ infatti $1 < x < 2 \Rightarrow 6 < (x-5) < 7 \Rightarrow \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{x-5} < \sqrt[3]{7}$ e quindi si ha $\sqrt[3]{x+5} \in (1,2)$;
- $|\Phi'(x)| \le k < 1 \quad \forall x \in (1,2)$ perché la derivata prima della funzione è monotona, in quanto composizione di funzioni monotone, ed in particolare è decrescente. Quindi $|\Phi'(x)| \le \underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{36}}}_{k} < 1 \quad \forall x \in [1,2]$.

L'ordine di convergenza è 1, in quanto $\Phi'(x^*) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^*+5)^2}}$ non è mai nulla.

La terza funzione è $\Phi(x) = \frac{2x^3+5}{3x^2-1}$. $\Phi'(x) = \frac{6x^2(3x^2-1) - 6x(2x^3+5)}{(3x^2-1)^2} = \frac{6x(x^3-x-5)}{(3x^2-1)^2}$ è la derivata prima.
Per definizione $x^{*3} - x^* - 5 = 0$ nel punto fisso, quindi $|\Phi'(x^*)| = 0 < 1$ solamente ne punto fisso nell'intervallo $[1,2]$. Per questo motivo il metodo è sicuramente

convergente. L'ordine di convergenza è 2, poiché $\Phi^{'}(x^*)=0$, e questo risultato è logico in quanto la riformulazione data è stata ricavata da un metodo di ordine 2.

Esercizio 2: equazioni differenziali ordinarie.

È assegnato il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{'''}(x)-4y^{''}(x)+2y^{'}(x)+3y(x)=x^2 \\ y(0)=1 \\ y^{'}(0)=2 \\ y^{''}(0)=-2 \end{cases}.$$

Riscriverlo come un sistema lineare del primo ordine.
Successivamente, fornire un'approssimazione della soluzione in $x=0.5$ usando il metodo di Eulero esplicito con $h=0.25$.

Soluzione:

In forma normale il sistema risulta:

$$\begin{cases} y^{'''}(x)=4y^{''}(x)-2y^{'}(x)-3y(x)+x^2 \\ y(0)=1 \\ y^{'}(0)=2 \\ y^{''}(0)=-2 \end{cases}.$$

Applicando la sostituzione standard si deve trovare un sistema di tante equazioni quanto è il grado dell'equazione differenziale di partenza.
In questo caso 3:

$$\begin{matrix} z_1(x)=y(x) \\ z_2(x)=y^{'}(x) \\ z_3(x)=y^{''}(x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1^{'}(x)=z_2(x) \\ z_2^{'}(x)=z_3(x) \\ z_3^{'}(x)=4z_3(x)-2z_2(x)-3z_1(x)+x^2 \end{cases}$$

a cui si sommano i dati iniziali ottenendo in tal modo la riscrittura del Problema di Cauchy come sistema del primo ordine

$$\begin{cases} z_1^{'}(x)=z_2(x) \\ z_2^{'}(x)=z_3(x) \\ z_3^{'}(x)=4z_3(x)-2z_2(x)-3z_1(x)+x^2 \\ z_1(0)=1 \\ z_2(0)=2 \\ z_3(0)=-2 \end{cases}.$$

Applicando il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 0.25$ si ottiene

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + hf\left(x^{(k)}, z^{(k)}\right)$$

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hf\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4(-2) - 2(3) - 3(1) + 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -23/4 \end{pmatrix}$$

$$z^{(2)} = z^{(1)} + hf\left(x^{(1)}, z^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -23/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -23/4 \\ 4\left(-23/4\right) - 2\left(3/2\right) - 3\left(3/2\right) + \left(1/4\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/8 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

dato che l'esercizio richiede il calcolo della sola $y(0.5)$ è possibile omettere il calcolo delle altre componenti di $z^{(2)}$. Quindi $y(0.5) \cong z_1^{(2)} = \frac{15}{8}$.

Esercizio 3:

Si ricavi la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero modificato.

Soluzione:

Applicando il metodo di Eulero modificato al problema test

$$y' = \lambda y$$
$$\Re e(\lambda) < 0$$

si ottiene

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}, y^{(k)} + \frac{h}{2} f\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right)$$

e poiché $f(x, y) \equiv \lambda y$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\lambda\left(y^{(k)} + \frac{h}{2}\lambda y^{(k)}\right) = y^{(k)} + h\lambda y^{(k)} + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 y^{(k)} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right) y^{(k)}.$$

Si deduce quindi

$$R_a = \left\{ h\lambda \in C : \left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 \right| < 1 \right\}.$$

Esercizio 4:

Stabilire se abbia senso cercare un passo h per cui un qualche metodo numerico sia assolutamente stabile per i seguenti Problemi di Cauchy:

a) $y' = -10y$, $y(0) = 1$;
b) $y' = 10y$, $y(0) = 1$;
c) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
d) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(2) = \pi$, $y'(2) = 4$;
e) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 1$;
f) $y'' - 8y' + 17y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
g) $y'' + 8y' + 17y = 0$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 8$.

Applicando il metodo di Heun si esegua un passo di integrazione per il caso $y'' + 8y' + 17y = 0$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 8$.

Soluzione:

Solamente per i problemi che risultano asintoticamente stabili ha senso cercare il passo h per cui un qualche metodo numerico sia assolutamente stabile.

a) $\lambda = -10 \Rightarrow$ problema asintoticamente stabile;
b) $\lambda = 10 \Rightarrow$ problema non asintoticamente stabile;
c) ricerca del sistema lineare del primo ordine equivalente $\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \end{cases}$

$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -6z_1 - 5z_2 \end{cases} \Leftrightarrow z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} z$ dove $z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$. Calcolo degli autovalori:

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(-5-\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$ quindi

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3 \Rightarrow$ problema asintoticamente stabile;

d) ricerca del sistema lineare del primo ordine equivalente $\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \end{cases}$

$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -6z_1 + 5z_2 \end{cases} \Leftrightarrow z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} z$ dove $z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$. Calcolo degli autovalori:

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(5-\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ quindi

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 \Rightarrow$ problema non asintoticamente stabile;

e) ricordando che il polinomio caratteristico di una equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti ha gli stessi coefficienti dell'equazione differenziale di partenza e che il grado del λ associato a ciascun coefficiente è pari all'ordine della derivata corrispondente, è immediato scrivere $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$. Si ottengono i seguenti autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ $\Rightarrow$ problema non asintoticamente stabile;

f) $\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm i$ autovalori complessi e coniugati $\Re e(\lambda) = 4$ $\Rightarrow$ problema non asintoticamente stabile;

g) $\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-68}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-4}}{2} = -4 \pm i$ complessi e coniugati $\Re e(\lambda) = -4$ $\Rightarrow$ problema asintoticamente stabile.

La regione di assoluta stabilità del metodo di Heun è la seguente

$R_a = \left\{ h\lambda \in C : \left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 \right| < 1 \right\}$. Nel caso in esame si ha $\lambda = -4 \pm i$.

$$\left| 1 + h(-4 \pm i) + \frac{1}{2}((-4 \pm i)h)^2 \right| < 1$$

$$\left| 1 - 4h \pm ih + \frac{1}{2}(-4h \pm ih)^2 \right| < 1$$

$$\left| 1 - 4h \pm ih + \frac{1}{2}\left(16h^2 - h^2 \mp 8h^2 i\right) \right| < 1$$

$$\left| 1 - 4h \pm ih + \frac{15}{2}h^2 \mp 4h^2 i \right| < 1$$

$$\left| \left(1 - 4h + \frac{15}{2}h^2\right) \pm \left(h - 4h^2\right)i \right| < 1$$

$$\left[\left(1 - 4h + \frac{15}{2}h^2\right)^2 + \left(h - 4h^2\right)^2 \right] < 1$$

$$h < \frac{8}{17}$$

ad esempio $h = \frac{1}{3} < \frac{8}{17}$.

Applicando la sostituzione standard all'equazione $y'' + 8y' + 17y = 0$ e riportando i dati iniziali, si ottiene il sistema lineare del primo ordine

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -17z_1 - 8z_2 \\ z_1(1) = 4 \\ z_2(1) = 8 \end{cases}.$$

Utilizzando il metodo di Heun si ottiene

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left(f\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) + f\left(x^{(k+1)}, y^{(k)} + hf\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right)\right)$$

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = z_1^{(0)} + \frac{h}{2}\left(f_1\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right) + f_1\left(x^{(1)}, z^{(0)} + hf\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right)\right)\right) \\ z_2^{(1)} = z_2^{(0)} + \frac{h}{2}\left(f_2\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right) + f_2\left(x^{(1)}, z^{(0)} + hf\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right)\right)\right) \end{cases}$$

e dato che

$$z^{(0)} + hf\left(x^{(0)}, z^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{3}\cdot 8 \\ 8 + \frac{1}{3}(-17\cdot 4 - 8\cdot 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ -36 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = 4 + \frac{1}{6}(8 + (-36)) \\ z_2^{(1)} = 8 + \frac{1}{6}\left(-17\cdot 4 - 8\cdot 8 + \left(-17\cdot\frac{20}{3} - 8\cdot(-36)\right)\right) \end{cases}.$$

Esercizio 5:

Sono assegnati $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stabilire se il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ è applicabile.
Stabilire, inoltre, se il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ è convergente.

Soluzione:

Il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ è sicuramente applicabile in quanto se si definisce la matrice M come la parte diagonale della matrice A si nota che essa è invertibile poiché non vi sono elementi a_{ii} nulli sulla diagonale di A.

Determinazione della convergenza

$$B_J = -M_J^{-1} N_J = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{B_J}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 7 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 6 \\ 7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2 - 6\right)$$

$\lambda = 0 \quad m = 2$
$\lambda = \pm\sqrt{6}$

$\rho(B_J) = \sqrt{6} > 1 \;\Rightarrow$ il metodo di Jacobi non converge.

Esercizio 6 :

Sono assegnati $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si enunci il Teorema di Stein–Rosenberg, citando correttamente ipotesi e tesi. Applicando il Teorema di Stein–Rosenberg, indicare se il metodo di Gauss–Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ risulta convergente.

Soluzione:

Teorema di Stein–Rosenberg

Sia $A \in \Re^{n\times n}$ con $a_{ij} \le 0 \quad \forall i \ne j$ e $a_{ii} > 0$. Allora si verifica uno e uno solo dei seguenti risultati:

1. $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$;
2. $1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$;
3. $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$;
4. $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 1$.

Applicazione del teorema

Nel nostro caso, poiché la matrice soddisfa le ipotesi del teorema si può concludere che

$1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$

e quindi il metodo di Gauss–Seidel risulta non convergente.

Esercizio 7 :

Sono assegnate le seguenti coppie di valori (x_i, y_i) per $i = 0,1,2,3$

x_i	2	-1	0	1
y_i	9	0	-3	0

si scriva il polinomio $P_n(x)$ che interpola i dati sia nella forma di Newton sia in quella di Lagrange.
Ai dati viene aggiunta la coppia $(-2,-3)$. Calcolare il nuovo polinomio $P_n(x)$ che interpola i dati. Si esprima quest'ultimo polinomio nella forma annidata di Ruffini–Horner.
Si risponda alla seguente domanda: sotto quali ipotesi il polinomio interpolante $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i) con $i = 0,1,\ldots,n$ esiste ed è unico?

Soluzione:

Usando la forma di Newton si costruisce la tavola delle differenze divise

$$\begin{array}{llll}
2 & 9 & & \\
-1 & 0 & \dfrac{0-9}{-1-2}=3 & \\
0 & -3 & \dfrac{-3-0}{0-(-1)}=-3 & \dfrac{-3-3}{0-2}=3 \\
1 & 0 & \dfrac{0-(-3)}{1-0}=3 \quad \dfrac{3-(-3)}{1-(-1)}=3 & \dfrac{3-3}{1-2}=0
\end{array}$$

quindi $p_2(x) = 9\omega_0(x) + 3\omega_1(x) + 3\omega_2(x) + 0\omega_3(x) = 9 + 3(x-2) + 3(x-2)(x+1)$

dove $\begin{cases} \omega_0(x) = 1 \\ \omega_1(x) = x-2 \\ \omega_2(x) = (x-2)(x+1) \\ \omega_3(x) = (x-2)(x+1)x \end{cases}$ è la base di Newton.

Per scrivere il polinomio $p_2(x)$ nella forma di Lagrange è necessario calcolare prima la base di Lagrange

$$l_0(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2(2-1)} = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1)$$

$$l_1(x) = -\frac{1}{6}(x-2)x(x-1)$$

$$l_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-1)$$
$$l_3(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+1)x$$

si può ora scrivere il polinomio nella forma di Lagrange

$$p_3(x) = 9 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) - 3 \cdot l_2(x) + 0 \cdot l_3(x) = 9l_0(x) - 3l_2(x)$$

Per inserire il nuovo dato è sufficiente aggiornare la tavola delle differenze divise

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 9 & & & & \\
-1 & 0 & 3 & & & \\
0 & -3 & -3 & 3 & & \\
1 & 0 & 3 & 3 & 0 & \\
-2 & -3 & \dfrac{-3-0}{-2-1}=1 & \dfrac{1-3}{-2-0}=1 & \dfrac{1-3}{-2-(-1)}=2 & \dfrac{2-0}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}
\end{array}$$

da cui $p_4(x) = p_2(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\omega_4(x) = 9 + 3(x-2) + 3(x-2)(x+1) - \frac{1}{2}(x-2)(x+1)x(x-1)$

avendo definito la base di Newton $\begin{cases} \omega_0(x) = 1 \\ \omega_1(x) = x-2 \\ \omega_2(x) = (x-2)(x+1) \\ \omega_3(x) = (x-2)(x+1)x \\ \omega_4(x) = (x-2)(x+1)x(x-1) \end{cases}$.

In forma annidata di Ruffini–Horner

$$p_4(x) = 9 + (x-2)\left(3 + (x+1)\left(3 + x\left(0 + (x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right).$$

Risposta alla domanda:

Se i nodi x_i sono distinti tra di loro, il polinomio interpolante (x_i, y_i) con $i = 0,1,\dots,n$ esiste ed è unico. Nodi distinti garantiscono, infatti, l'invertibilità della matrice di Grahm e quindi l'esistenza ed unicità della soluzione di un sistema lineare che fornisce i coefficienti del polinomio.

Esercizio 8:

È assegnato il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 198y' - 400y = \cos(\pi t) + t \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 3 \end{cases} \quad \text{con } t \in (2,12).$$

Si indichi se il problema è lineare, stiff, da ricondurre ad un sistema del primo ordine.
Indicare il numero minimo di passi da effettuare con il metodo di Eulero esplicito per determinare l'approssimazione della soluzione in $t = 3$, usando un passo h he garantisca l'assoluta stabilità del metodo.
Si calcoli l'approssimazione della soluzione in $t = 3$ con il metodo di Eulero implicito, usando un passo h che garantisca l'assoluta stabilità del metodo. Si risolvano gli eventuali sistemi lineari con un qualunque metodo numerico.

Soluzione:

Il sistema è sicuramente lineare, poiché non contiene termini non lineari nella variabile y.

Il sistema non è del primo ordine, quindi è da ricondurre ad un sistema del primo ordine.

Calcolo degli autovalori

$$\lambda^2 + 198\lambda - 400 = 0 \Rightarrow (\lambda + 200)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = +2$, $\lambda_2 = -200$ l'autovalore positivo è ragionevolmente piccolo rispetto all'ampiezza dell'intervallo di integrazione $2 \cdot 10 = 20$; l'autovalore negativo è tale da soddisfare la seguente richiesta

$$-200 \cdot 10 = -2000 << -1.$$

Per questi motivi è possibile concludere che il problema è stiff.

Numero minimo di passi con Eulero esplicito

$|1 + h\lambda| < 1$ con $\lambda = -200$

$$|1 - 200h| < 1$$

$$h < \frac{2}{200} = \frac{1}{100}$$

Per ottenere la soluzione in $t = 3$ si deve coprire un intervallo di ampiezza pari a 1 e perciò è necessario compiere almeno 100 passi.

Con Eulero implicito

$$\frac{1}{|1-h\lambda|}<1$$
$$|1-h\lambda|>1$$
$$|1+200h|>1$$

qualunque passo $h>0$ garantisce l'assoluta stabilità.

Si sceglie $h=1$.

Il metodo di Eulero implicito ha la seguente forma

$$y^{(k+1)}=y^{(k)}+hf\left(t^{(k+1)},y^{(k+1)}\right).$$

Riscrivendo il problema sotto forma di sistema del primo ordine si ottiene

$$\begin{cases} z_1^{'}=z_2 \\ z_2^{'}=400z_1-198z_2+\cos(\pi t)+t \\ z_1(2)=0 \\ z_2(2)=3 \end{cases}$$

e in forma matriciale, posto $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, si ha

$$z^{'}=Az+g(t)$$

dove $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 400 & -198 \end{pmatrix}$ e $g(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\pi t)+t \end{pmatrix}$.

Applicando il metodo di Eulero implicito

$$z^{(1)}=z^{(0)}+h\left(Az^{(1)}+g\left(t^{(1)}\right)\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}+\left(Az^{(1)}+\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}+Az^{(1)}$$
$$z^{(1)}-Az^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$(I-A)z^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -400 & 199 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che è un sistema lineare risolvibile con eliminazione gaussiana con pivoting

$$\left(\begin{array}{cc|c} -400 & 199 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -400 & 199 & 5 \\ 0 & -1+{}^{199}\!/_{400} & 0+{}^{5}\!/_{400} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -400 & 199 & 5 \\ 0 & -{}^{201}\!/_{400} & {}^{5}\!/_{400} \end{array}\right)$$

$$z_2^{(1)} = \frac{5}{400}\left(-\frac{400}{201}\right) = -\frac{5}{201}$$

$$z_1^{(1)} = \left[5-199\left(-\frac{5}{201}\right)\right]\cdot\frac{1}{-400} = \left(5+5\cdot\frac{199}{201}\right)\frac{1}{-400} = 5\frac{201+199}{201}\frac{1}{-400} = 5\frac{400}{201}\frac{1}{-400} = -\frac{5}{201}$$

La soluzione cercata è $y(3) \cong -\dfrac{5}{201}$.

Esercizio 9:

Sono assegnati i vettori $x = (-2,-1,0,1,2)$ e $y = (5,2,1,2,5)$. Si vogliono approssimare con una parabola i dati (x_i, y_i) usando il metodo dei minimi quadrati.

Soluzione:

Per ottenere i coefficienti della parabola si deve costruire e risolvere il sistema lineare $A^T Aa = A^T y$.

Si definiscono $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$ e $\varphi_3(x) = x^2$.

La matrice A è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$.

La matrice $A^T y$ è la seguente

$$A^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema si determinano i coefficienti della parabola $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10:

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si richiede di

a) calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ usando la strategia del pivoting parziale;
b) determinare l'inversa della matrice A risolvendo tre sistemi lineari $Ax = b_i$, $i = 1,2,3$ con $b_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^T$, $b_2 = (0 \quad 1 \quad 0)^T$ e $b_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$ usando la fattorizzazione determinata al punto precedente;
c) calcolare il numero di condizionamenti di A in norma 1;
d) spiegare l'influenza del numero di condizionamento della matrice A sulla soluzione di un generico sistema lineare $Ax = b$.

Soluzione:

a) $P_{13}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \\ 1/4 & 9/2 & 11/2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{23}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1/4 & 9/4 & 11/2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1/4 & 9/2 & 11/2 \\ 1/2 & 4/9 & -4/9 \end{pmatrix}$$

da cui si ricavano facilmente le matrici L ed U

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/9 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 9/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & -4/9 \end{pmatrix}$$

e la matrice di permutazione è

$$P = P_{23}P_{13} = P_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det P \cdot \det A = \det L \cdot \det U$$
$$\det A = \frac{\det L \cdot \det U}{\det P} = \frac{1 \cdot (-8)}{+1} = -8 \ .$$

b) L'inversa della matrice A è quella matrice X per cui $AX = I$. Se si definiscono X_1, X_2 e X_3 le colonne della matrice X si può porre

$$A(X_1 \quad X_2 \quad X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che equivale ai tre sistemi lineari

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si possono risolvere singolarmente applicando la fattorizzazione $PA = LU$.

Si svolge solamente il primo caso. Gli altri sono identici nel procedimento, cambiano solo i valori numerici.

$$\begin{cases} Ly = Pb_1 \\ Ux = y \end{cases} \text{ dove } b_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Pb_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } Ly = Pb_1$$

quindi

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{0}{1} = 0 \\ y_2 = \dfrac{1 - \frac{1}{4} \cdot 0}{1} = 1 \\ y_3 = \dfrac{0 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{4}{9} \cdot 1}{1} = -\dfrac{4}{9} \end{cases}.$$

Risolvendo $Ux = y$ si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{-\frac{4}{9}}{-\frac{4}{9}} = 1 \\ x_2 = \dfrac{1 - \frac{11}{2} \cdot 1}{\frac{9}{2}} = -1 \\ x_1 = \dfrac{0 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1}{4} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la prima colonna della matrice inversa di A è $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svolgendo analoghi calcoli per le due rimanenti colonne si ottiene

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0.375 \\ -1 & 2.75 & -1.125 \\ 1 & -2.25 & 0.875 \end{pmatrix}.$$

c) $K_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$

$$\|A\|_1 = \max(1+2+4,\, 5+3+2,\, 6+3+2) = \max(7, 10, 11) = 11$$

d) Il problema richiede di spiegare il concetto di condizionamento di un problema. Si rimanda al testo e agli appunti per tale spiegazione.

Esercizio 11:

Dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \cos(y) = t^2 \quad t \in (0,T) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

eseguire un passo di integrazione utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 0.1$.

Soluzione:

Applicando la consueta sostituzione standard:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -2z_2 - \cos(z_1) + t^2 \\ z_1(0) = 2 \\ z_2(0) = 1 \end{cases}$$

e il metodo di Eulero esplicito:

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = z_1^{(0)} + h\left(z_2^{(0)}\right) \\ z_2^{(1)} = z_2^{(0)} + h\left(-2z_2^{(0)} - \cos\left(z_1^{(0)}\right) + t^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = 2 + \frac{1}{10}(1) = \frac{21}{10} \\ z_2^{(1)} = 1 + \frac{1}{10}\left(-2 \cdot 1 - \cos(2) + 0^2\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{10}\cos(2) \end{cases}.$$

E quindi la soluzione del problema è

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = \frac{21}{10} \\ z_2^{(1)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{10}\cos(2) \end{cases}.$$

Esercizio 12:

Si consideri l'integrale $I = \int_4^6 \ln\left(x^4\right) dx$.

Si indichi una strategia possibile per approssimare l'integrale con un metodo numerico con errore inferiore a 10^{-6}.
Si calcoli l'approssimazione di I che si ottiene con il metodo di Simpson composito usando complessivamente 5 nodi.

Soluzione:

$$I = \int_4^6 4\ln(x)dx = 4\int_4^6 \ln(x)dx$$

Applicando Simpson composito:

$$c \in [4,6],\ h = \frac{b-a}{N} = \frac{2}{N}$$

$$R_N^{\ S} = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(c) = -\frac{1}{1440}\frac{16}{N^4} f^{(4)}(c) = -\frac{1}{90}\frac{1}{N^4} f^{(4)}(c)$$

$$f'(x) = \frac{4}{x},\ f''(x) = -\frac{4}{x^2},\ f'''(x) = \frac{8}{x^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^4}$$

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{24}{x^4} \text{ monotona decrescente}$$

quindi $\max_{x\in[4,6]}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(4) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \Rightarrow \left|R_N^{\ S}\right| \leq \frac{1}{90N^4}\frac{3}{32} < 10^{-6} \Rightarrow N > \sqrt[4]{\frac{10^5}{96}} \cong 10^4$.

Calcolo dell'approssimazione dell'integrale

$$h = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$I \cong 4\left(\frac{h}{6}\left(f(4) + 4f\left(\frac{9}{2}\right) + f(5) + f(5) + 4f\left(\frac{11}{2}\right) + f(6)\right)\right) =$$
$$= 4\left[\frac{1}{6}\left(\ln 4 + 4\ln\frac{9}{2} + 2\ln 5 + 4\ln\frac{11}{2} + \ln 6\right)\right].$$

Esercizio 13:

Data la seguente equazione non lineare

$$\ln x + \sin x = 0$$

indicare uno o più punti iniziali che garantiscono la convergenza e l'ordine di convergenza, sapendo che l'intervallo di localizzazione della soluzione è $x^* \in (0,1)$.

Soluzione:

Nell'intervallo dato la funzione f non è di classe $C^2[a,b]$. Si sceglie, quindi, un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere tale per cui se $[a,b] = [\varepsilon,1]$ allora $f \in C^2[a,b]$.

- $f(a) \cdot f(b) < 0$? $f(\varepsilon) < 0$, $f(1) > 0 \Rightarrow$ sì;
- $\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix}$? $\forall x \in [\varepsilon,1]$ $f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x > 0$ perché somma di due funzioni positive nell'intervallo considerato $\Rightarrow$ sì;
- $\begin{matrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix}$? $\forall x \in [\varepsilon,1]$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \sin x < 0$ perché somma algebrica di due funzioni negative nell'intervallo considerato $\Rightarrow$ sì.

Quindi la convergenza è garantita per ogni x_0 tale che $f(x_0) f''(x_0) > 0$, ossia per ogni x_0 tale per cui $f(x_0) < 0$. In altre parole per x_0 molto piccolo.

L'ordine di convergenza è $\rho = 2$ poiché, sicuramente, $f(x^*) \neq 0$.

Esercizio 14:

È assegnata la funzione $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{8}} + \sin\frac{x}{4}$ che ammette un unico punto fisso in $x^* \in [0,2]$.

Enunciare (citando correttamente ipotesi e tesi) il teorema da applicare per dimostrare che il metodo delle iterate successive applicato al problema in questione converge $\forall x_0 \in [0,2]$ (dimostrarlo).

Soluzione:

Sia $[a,b]$ chiuso e limitato tale che

1. $\phi \in C^1[a,b]$
2. $\phi : [a,b] \mapsto [a,b]$
3. $\exists k > 0$, $k < 1$ tale che $|\phi'(x)| \leq k < 1$ $\forall x \in [a,b]$

allora il metodo delle iterate successive converge all'unico punto fisso di ϕ presente in $[a,b]$.

Dimostrazione

1. $\phi \in C^\infty[\Re]$ quindi, in particolare, $\phi \in C^1[0,2]$;

2. $\phi:[0,2]\mapsto[0,2]$, infatti, se $x\in[0,2]$ vale $e^{-\frac{x^2}{8}}\in[0,1]$ e $\sin\frac{x}{4}\in[0,1]$, e perciò $e^{-\frac{x^2}{8}}+\sin\frac{x}{4}\in[0,2]$;
3. la derivata prima della funzione ϕ è $\phi'(x)=-\frac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$; $\left|\phi'(x)\right|=\left|-\frac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}\right|<\frac{1}{4}\left|xe^{-\frac{x^2}{8}}\right|+\frac{1}{4}\left|\cos\frac{x}{4}\right|<\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$ è quindi possibile dire che $\left|\phi'(x)\right|<\frac{3}{4}<1\ \ \forall x\in[a,b]$.

c.v.d.