ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 1:

È assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+3y'(x)+3y(x)=\ln(x+1)+\sin x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \qquad x\in(0,+\infty).$$

- Riscriverlo come un sistema lineare del primo ordine.
- Si vuole usare il metodi di Eulero esplicito per integrarlo numericamente. Determinare un passo h per cui il metodo sia assolutamente stabile ed eseguire due passi di integrazione.

Soluzione:

Applicando una sostituzione standard

$$z_1 = y(x)$$
$$z_2 = y'(x)$$

si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} z_1'(x)=z_2(x) \\ z_2'(x)=-3z_2(x)-3z_1(x)+\ln(x+1)+\sin x \\ z_1(0)=1 \\ z_2(0)=2 \end{cases}$$

che, pur non sembrandolo, è lineare. Infatti $y' = f(t,y)$ è lineare se $f(t,y)$ è lineare in y cioè è della forma

$$f(t,y(t))=A(t)y(t)+g(t)$$

con, eventualmente, $g(t)$ (detto termine <u>non autonomo</u>) non lineare. Se $A(t)$ non dipende da t, allora il sistema è a coefficienti costanti.

Ponendo

$$z(x)=\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$$

il sistema ottenuto risulta, in forma matriciale, così definito

$$\begin{cases} z'(x) = Az(x) + g(x) \\ z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

in cui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ e $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x+1) + \sin x \end{pmatrix}$.

Applicando Eulero esplicito si ha

$|1 + h\lambda| < 1$.

Quanto vale $\lambda(A)$? Per saperlo, occorre calcolare gli autovalori della matrice A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda) + 3 = \lambda^2 + 3\lambda + 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

quindi gli autovalori sono complessi e coniugati.

Il prodotto $h\lambda$ fa riscalare l'autovalore λ. Esso si muove sulla semiretta che unisce l'autovalore stesso con l'origine. Se l'autovalore λ è sul bordo della circonferenza centrata in -1 e di raggio unitario che delimita la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito, $\forall h < 1$ il metodo risulta assolutamente stabile. Se l'autovalore λ si trova già all'interno della regione di assoluta stabilità, il metodo può risultare assolutamente stabile anche con un passo leggermente maggiore di 1. Se, invece, l'autovalore λ si trova all'esterno della regione di assoluta stabilità, il passo h da scegliere perché ci sia stabilità assoluta sarà molto minore di 1.

$$|1 + h\lambda| < 1$$

$$1 + h\lambda = 1 + h\left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \frac{3}{2}h \pm h\frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Dato che anche $1 + h\lambda$ è complesso coniugato, il suo valore assoluto coincide con il modulo del numero complesso (non importa quale dei due coniugati, in quanto hanno lo stesso modulo). Applicando il teorema di Pitagora si ha

$$|1 + h\lambda| = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}h\right)^2 + \left(h\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} < 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{2}h\right)^2 + \left(h\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 < 1$$

$$1+\frac{9}{4}h^2-3h+\frac{3}{4}h^2<1$$
$$1-3h+3h^2<1$$
$$3h^2-3h<0$$
$$3h(h-1)<0$$
$$0<h<1$$

Si conclude che gli autovalori λ_1 e λ_2 si trovano esattamente sulla circonferenza che delimita la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito.

Riassumendo: il metodo è assolutamente stabile $\forall h<1$.

Ad esempio, si ponga $h=\frac{1}{2}$. Con questo valore è possibile eseguire due passi del metodo di Eulero esplicito, garantendone la convergenza.

$$z^{(k+1)}=z^{(k)}+hf\left(x^{(k)},z^{(k)}\right)$$

Ricordando il sistema del primo ordine ottenuto in precedenza

$$\begin{cases} z_1'(x)=z_2(x) \\ z_2'(x)=-3z_2(x)-3z_1(x)+\ln(x+1)+\sin x \\ z_1(0)=1 \\ z_2(0)=2 \end{cases}$$

si ha $x^{(0)}=0$. Il primo passo del metodo di Eulero esplicito permette di ottenere $z^{(1)}$, ossia la soluzione numerica in $x^{(1)}=x^{(0)}+h=0+\frac{1}{2}=0+0.5=0.5$

$$z^{(1)}=z^{(0)}+\frac{1}{2}f\left(x^{(0)},z^{(0)}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z_2^{(0)}\\-3z_2^{(0)}-3z_1^{(0)}+\ln\left(x^{(0)}+1\right)+\sin x^{(0)}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\cdot2-3\cdot1+\ln(0+1)+\sin(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-6-3+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2\\-5/2\end{pmatrix}$$

Il secondo passo del metodo è il seguente

$$z^{(2)}=z^{(1)}+\frac{1}{2}f\left(x^{(1)},z^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}2\\-5/2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5/2\\-3\left(-5/2\right)-3\cdot2+\ln\left(1/2+1\right)+\sin\left(1/2\right)\end{pmatrix}=$$

$$= \left(-\frac{5}{2} + \frac{15}{4} - 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right).$$

Se si volesse calcolare la soluzione numerica nel punto 3.5 sarebbe necessario effettuare 7 passi.