ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Equazioni non lineari: problema di punto fisso

Esercizio 1:

Si vogliono approssimare le soluzioni dell'equazione non lineare

$$e^{-\frac{x^2}{3}} - x = 0 .$$

- Determinare il numero di radici dell'equazione e localizzarle.

Il problema $f(x) = 0$ può essere riformulato come un problema di punto fisso con (almeno) le seguenti due funzioni:

- $\phi_1(x) = \ln x + x + \frac{1}{3}x^2$;
- $\phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}$.

Si richiede di

- stabilire se il metodo delle iterate successive può convergere;
- se può convergere, indicare dei punti iniziali per cui converge;
- se può convergere, indicare l'ordine di convergenza.

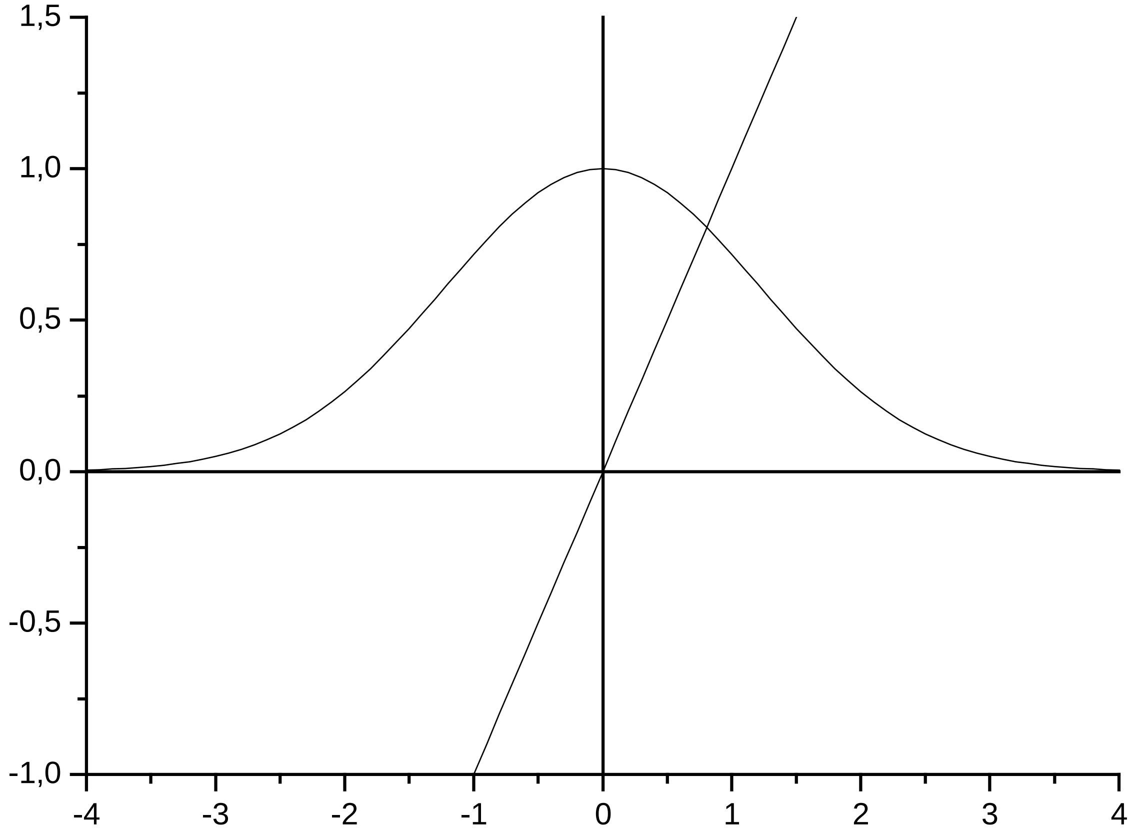
Soluzione:

Per determinare il numero di radici è possibile ragionare graficamente studiando l'equazione $e^{-\frac{x^2}{3}} = x$, cioè cercando le intersezioni fra la funzione $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$ e la funzione $y = x$. La funzione $y = x$ non è altro che la bisettrice del primo e del terzo quadrante. La funzione $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$ è invece una curva a campana di tipo gaussiano, in quanto è "parente stretta" della curva gaussiana standard $y = e^{-x^2}$.

È possibile affermare con sicurezza che $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$ è sempre strettamente positiva in un qualsiasi intervallo limitato di $\Re$; ha un massimo in corrispondenza di $x = 0$, in cui assume valore unitario; è crescente per le $x < 0$ e decrescente per le $x > 0$.
La bisettrice del primo e del terzo quadrante, invece, assume valori positivi per le ascisse positive e valori negativi per le ascisse negative. Inoltre è monotona crescente.

L'intersezione tra le due curve può esistere solamente nel primo quadrante, poiché le due funzioni assumono entrambe valori positivi per ascisse positive. Inoltre, per considerazioni geometriche e sul segno delle derivate prime, si può concludere che la soluzione è unica, cioè i due grafici si intersecano in uno e un solo punto x^*.

Il grafico delle funzioni è il seguente:



Dato che $e^{-kx^2} \leq 1 \;\; \forall k$ e $\forall x \in \Re$, si deduce che $0 < x^* < 1$. Infatti per $x = 0$ la curva a campana assume il valore massimo 1, ma la bisettrice assume valore nullo. Viceversa, per $x = 1$ la bisettrice assume valore unitario, ma la curva a campana assume un valore sicuramente minore di 1. Quindi l'intersezione fra le due curve si trova, per forza, all'interno dell'intervallo $(0,1)$.

<u>Problema di punto fisso</u>

Verifica della correttezza delle riformulazioni proposte:

$$\phi_1(x):\; e^{-\frac{x^2}{3}} - x = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{3}} = x \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 = \ln x \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + x = \ln x + x \Rightarrow x = \frac{1}{3}x^2 + \ln x + x$$

$$\phi_2(x):\; e^{-\frac{x^2}{3}} - x = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{3}} = x$$

entrambe le riformulazioni proposte sono corrette.

Convergenza: $x^* \in (0,1)$

$$\phi_1(x) = \ln x + x + \frac{1}{3}x^2$$

$$\left|\phi_1^{'}(x^*)\right| = \left|\frac{1}{x} + 1 + \frac{2}{3}x\right| > 1$$

tenuto conto del fatto che $x^* \in (0,1)$. Quindi il metodo <u>non può convergere</u> perché non si soddisfano le condizioni del teorema di convergenza.

$$\phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}$$

$$\left|\phi_2^{'}(x^*)\right| = \left|-\frac{2}{3}x \cdot e^{-\frac{x^2}{3}}\right| = \frac{2}{3}|x|e^{-\frac{x^2}{3}}$$

dato che $x^* \in (0,1)$, operando una maggiorazione del modulo della derivata prima calcolata in $x^* = 1$, si ottiene

$$\left|\phi_2^{'}(x^*)\right| \leq \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1 .$$

Quindi il metodo <u>può convergere</u>.

Punti iniziali: $x^* \in [0,1]$

$$[a,b] = [0,1]$$

Verifica del soddisfacimento delle condizioni del teorema di convergenza globale

- $\phi \in C^1[a,b]$? Sì, perché $e^{-\frac{x^2}{3}} \in C^\infty(\Re)$.
- $\phi : [a,b] \mapsto [a,b]$? Sì, perché $0 \leq e^{-\frac{x^2}{3}} \leq 1$ in $(-\infty,+\infty)$.
- $\left|\phi^{'}(x^*)\right| \leq K < 1$, $\forall x \in [0,1]$? Sì, perché $\left|\phi_2^{'}(x^*)\right| \leq \frac{2}{3} < 1$ con $K = \frac{2}{3}$.

Allora è garantita la convergenza $\forall x_0 \in [0,1]$.

Ordine di convergenza:

La derivata prima $\phi_2^{'}(x^*) = -\frac{2}{3}(x^*) \cdot e^{-\frac{(x^*)^2}{3}}$ si può annullare solamente in $x = 0$, ma poiché è chiaro che $x = 0$ non è il punto fisso, infatti $e^{-\frac{0}{3}} = 1 \neq 0$, è possibile concludere che $\phi_2^{'}(x^*) \neq 0$. Quindi l'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 2 :

Data l'equazione non lineare

$$x + \ln x = 0$$

che ha un'unica radice $x^* \cong 0.5$, studiare la convergenza dei seguenti metodi iterativi per l'approssimazione di x^*:

- $x_{k+1} = -\ln x_k$ (problema di punto fisso con $\phi(x) = -\ln x$);
- $x_{k+1} = e^{-x_k}$ (problema di punto fisso con $\phi(x) = e^{-x}$);
- $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + e^{-x_k}\right)$(problema di punto fisso con $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + e^{-x}\right)$);
- $x_{k+1} = \dfrac{x_k(1-\ln x)}{x_k + 1}$(problema di punto fisso con $\phi(x) = \dfrac{x(1-\ln x)}{x+1}$).

Soluzione:

Primo caso:

$$\phi(x) = -\ln x$$
$$\phi'(x) = -\frac{1}{x}$$

dato che $x^* \cong 0.5$ allora

$$\phi'(x^*) \cong -2$$
$$|\phi'(x^*)| \cong 2 > 1$$

e il metodo non converge.

Secondo caso:

$$\phi'(x) = -e^{-x}$$
$$\phi'(x^*) \cong -e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \cong -0.6$$
$$|\phi'(x^*)| \cong 0.6 < 1$$

e il metodo converge con ordine di convergenza 1.

Terzo caso:

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\right)$$

$$\phi'(x^*) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cong 0.2$$
$$\left|\phi'(x^*)\right| \cong 0.2 < 1$$

e il metodo converge con ordine di convergenza 1.

A parità di ordine di convergenza, è più rapido il metodo che presenta $\left|\phi'(x^*)\right|$ minore.

Quarto caso:

$$\phi'(x) = \frac{\left((1 - \ln x) + x\left(-\frac{1}{x}\right)\right)(x+1) - x(1 - \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{(1 - \ln x - 1)(x+1) - x + x\ln x}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{-x\ln x - \ln x - x + x\ln x}{(x+1)^2} = -\frac{x + \ln x}{(x+1)^2}$$

il numeratore è esattamente uguale all'equazione di partenza quindi, poiché il punto x^* è una soluzione di tale equazione, si ha

$$\phi'(x^*) = 0$$
$$\left|\phi'(x^*)\right| = 0 < 1$$

e il metodo converge con ordine di convergenza almeno 2.

$$\phi''(x) = \frac{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x+1)^2 + (x + \ln x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-\frac{1}{x}(x+1)^3 + 2(x + \ln x)(x+1)}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{(x+1)\left(-\frac{1}{x}(x+1)^2 + 2(x + \ln x)\right)}{(x+1)^4} = \frac{-\frac{1}{x}(x+1)^2 + 2(x + \ln x)}{(x+1)^3}$$

e ricordando che, in x^*, vale $x^* - \ln x^* = 0$

$$\phi''(x^*) = \frac{-\frac{1}{x}(x^*+1)^2}{(x^*+1)^3} = -\frac{1}{x^*(x^*+1)} \cong -\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{4}{3} \neq 0$$

e quindi l'ordine di convergenza è 2.

Questo risultato non è inaspettato. Infatti, questo metodo coincide con il metodo di Newton applicato all'equazione di partenza:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \ln x_k}{1 + \frac{1}{x_k}}$$

e

$$f^{'}(x*) = 1 + \frac{1}{x_k} \cong 1 + 2 = 3 \neq 0$$

quindi l'ordine di convergenza è 2.