

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Equazioni non lineari

Esercizio 1:

È assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 + 5x - \sin(\pi x) + 3.$$

Si dimostri che la funzione ha un'unica radice reale e la si localizzi in un intervallo di ampiezza unitaria. In seguito, utilizzare il metodo di bisezione per approssimare la radice con un errore non superiore a 0.1, motivando perché siete certi di avere un errore non superiore al valore fissato.

Soluzione:

Per cominciare è utile classificare la funzione:

la funzione è continua e infinitamente derivabile su tutto l'insieme reale, quindi

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

i limiti agli estremi di \mathbb{R} sono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

in quanto, pur essendoci un termine oscillante (il seno) il termine cubico “vince” e “trascina” la funzione, agli estremi del dominio.

Dato che la funzione passa almeno una volta dai valori negativi a quelli positivi, ci sarà almeno una radice reale. Graficamente, la funzione attraversa l'asse delle ascisse almeno una volta.

Per capire quante volte la funzione si annulla è sufficiente determinare i punti di estremo (massimi e minimi):

$$f'(x) = 3x^2 + 5 - \pi \cos(\pi x)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 + 5 - \pi \cos(\pi x) > 0$$

Il primo termine è un quadrato, quindi è sempre maggiore o uguale a zero; $5 > 0$ per definizione; il termine $\pi \cos(\pi x)$ è compreso fra $-\pi$ e π . Dato che $-\pi$ è, in modulo, minore di 5, possiamo concludere che

$$f'(x) > 5 - \pi \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè che la funzione $f(x)$ è monotona crescente.

Si può quindi affermare che esiste una e una sola radice reale: $\exists! x^*$ tale che $f(x^*) = 0$.

Localizzazione della radice:

$$x = 0 \quad f(0) = 3 > 0$$

se si diminuisce la x

$$x = -1 \quad f(-1) = -1 - 5 - \sin(-\pi) + 3 = -3 < 0$$

perciò $x^* \in [-1, 0]$.

Approssimazione della radice mediante l'uso del metodo di bisezione:

$e_k \leq 0.1$, richiesta sull'errore;

$e_k \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$, maggiorazione dell'errore.

Sostituendo:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \leq 0.1$$

la precedente disuguaglianza è verificata non appena $k+1 \geq \log_2 10 \cong 3.3$, cioè con un numero di iterazioni tale che $k+1 = 4$.

$$[a_0, b_0] = [-1, 0]$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{5}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = -\frac{1}{8} - \frac{5}{2} + 1 + 3 = \frac{11}{8} > 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{4}\right) &= -\frac{27}{64} - \frac{15}{4} - \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + 3 = -\frac{27}{64} - \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 = \frac{-27 - 240 + 32\sqrt{2} + 192}{64} = \\ &= \frac{-75 + 32\sqrt{2}}{64} < 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = -\frac{5}{8}$$

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{125}{512} - \frac{25}{8} - \sin\left(-\frac{5}{8}\pi\right) + 3 = -\frac{1725}{512} + 3.034 < 0$$

$$x_3 = -\frac{9}{16}$$

L'errore è sicuramente minore di 0.1, in quanto $k+1=4$ è stato calcolato utilizzando una maggiorazione dell'errore. Quindi $k+1=4$ indica il numero minimo di passi da svolgere perché l'errore scenda sicuramente al di sotto del limite richiesto.

Esercizio 2:

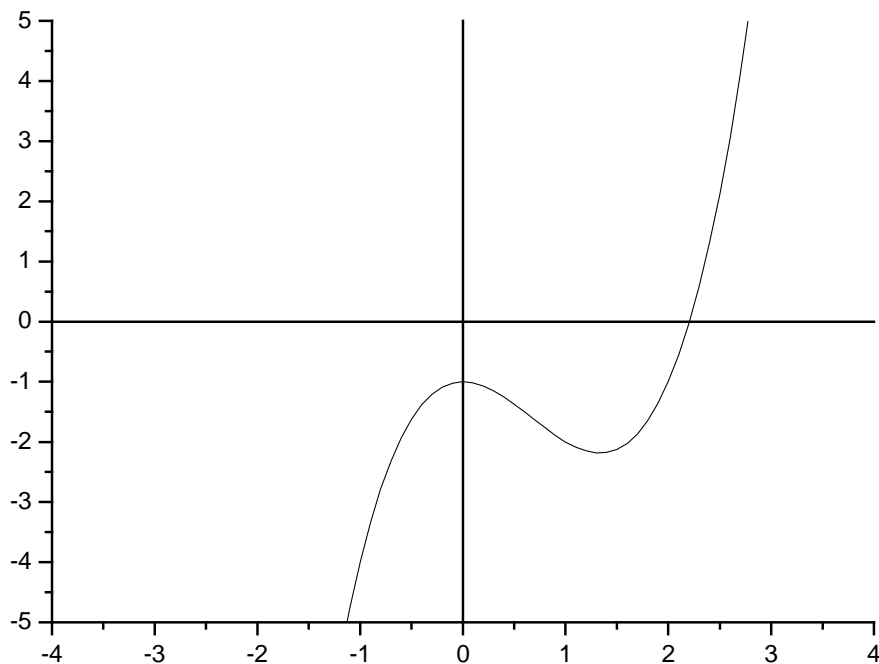
È assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.$$

Si localizzino le radici e si studi la convergenza del metodo di Newton per approssimare le radici. Successivamente, si applichi dapprima un passo del metodo di Newton e infine un passo del metodo delle secanti.

Soluzione:

Il grafico della funzione è il seguente



Determinazione del comportamento agli estremi del dominio:

senza calcolare i limiti è possibile affermare che per $x \rightarrow +\infty$ la funzione tende a $+\infty$ e che per $x \rightarrow -\infty$ la funzione tende a $-\infty$.

Determinazione dei punti stazionari

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$f(0) = -1 \text{ è il massimo.}$$

Quindi la funzione interseca l'asse delle ascisse in un solo punto.

Localizzazione della radice:

$$f(2) = 8 - 8 - 1 = -1 < 0$$

$$f(3) = 27 - 18 - 1 = 8 > 0$$

$$x^* \in [2, 3].$$

Convergenza del metodo di Newton:

Per garantire la convergenza del metodo di Newton è possibile verificare se si soddisfano le condizioni poste da uno dei due teoremi di convergenza. In questo caso si verificano le quattro richieste del primo teorema:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(2) \cdot f(3) = -8 < 0 \Rightarrow OK$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [2, 3]$: sì, perché l'intervallo $[2, 3]$ è interamente a destra del minimo della funzione $x = \frac{4}{3} \Rightarrow OK$
- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [2, 3]$: $f''(x) = 6x - 4$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} < 2$ e $[2, 3]$ si trova tutto a destra del punto in cui si annulla la derivata seconda $\Rightarrow OK$
- $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4} < 1 = 3 - 2 = b - a$ e $\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| = \left| \frac{8}{15} \right| = \frac{8}{15} < 1 = 3 - 2 = b - a \Rightarrow OK$

dato che tutte le condizioni sono verificate si può concludere che è garantita la convergenza del metodo di Newton $\forall x_0 \in [2, 3]$. L'ordine di convergenza è quadratico se $f'(x^*) \neq 0$, è lineare se $f'(x^*) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ punti che } \notin [2, 3]; \text{ inoltre } x^* \neq 0 \text{ e } x^* \neq \frac{4}{3}, \text{ quindi } f'(x^*) \neq 0.$$

Si deduce che l'ordine di convergenza è $p = 2$.

Metodo di Newton:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{9}{4} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^3 - 2\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 1}{3\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 4\frac{9}{4}}$$

Metodo delle secanti:

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 3$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} = 3 - \frac{8}{\frac{8 - (-1)}{3 - 2}} = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$$

Esercizio 3:

È assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 3.$$

Sapendo che $x^* \in [-3, -2]$ e che il metodo di Newton risulta convergente $\forall x_0 \in [-3, -2]$

- analizzare il comportamento della successione originata tramite il metodo di Newton a partire da $x_0 = 0$;
- determinare un x_0 tale che la successione originata tramite il metodo di Newton (in aritmetica infinita) a partire da x_0 contenga il valore 0;
- discutere il motivo per cui nel testo del punto precedente è necessario specificare “in aritmetica infinita”.

Soluzione:

Applicazione del metodo di Newton

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 3}{3x_0^2 - 3} = 0 - \frac{3}{-3} = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1 - 3 + 3}{3 - 3}$$

si è trovato un punto x_1 per cui $f'(x_1) = 0$. Quindi il metodo di Newton non è più applicabile.

Problema inverso:

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow 0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 3}{3x_0^2 - 3} = 0$$

$$\frac{3x_0^3 - 3x_0 - x_0^3 + 3x_0 - 3}{3x_0^2 - 3} = 0$$

$$\frac{2x_0^3 - 3}{3x_0^2 - 3} = 0$$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

il valore $x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ è tale per cui $x_1 = 0$.

In aritmetica finita NON è possibile garantire che x_1 sia esattamente pari a 0, partendo da $x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

In generale, se $x_1 = \bar{x}$, si può solamente garantire che $\frac{|x_1 - \bar{x}|}{|\bar{x}|} \cong 10^{-16}$, dove 10^{-16} è la precisione di macchina.