ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Formule di quadratura

Esercizio 1:

Costruire la formula di quadratura interpolatoria del tipo

$$\int_0^4 f(x)dx \cong w_0 f(1) + w_1 f(2) + w_2 f(3)$$

classificandola e determinandone l'ordine di accuratezza polinomiale.

Soluzione:

Per costruzione una formula interpolatoria su n nodi è esatta per i polinomi $p_{n-1}(x)$. L'ordine di accuratezza polinomiale è il massimo grado d dei polinomi per cui la formula è esatta: la formula è esatta per TUTTI i polinomi di grado minore o uguale a d ed esiste almeno un polinomio di grado $d+1$ per cui la formula NON è esatta.

Per prima cosa classifichiamo la formula.

I nodi sono 3 e sono i punti di ascissa 1, 2 e 3. Gli estremi di integrazione non sono nodi, quindi la formula è di tipo aperto.
I nodi sono equidistanti fra di loro e sono equidistanti dagli estremi.

Quindi stiamo ricercando una formula di Newton–Cotes aperta, costruita su tre nodi.

N.B.: NON è la formula di Cavalieri–Simpson perché la formula richiesta non è chiusa.

L'ordine di accuratezza polinomiale è 3.

Ricaviamo ora la formula di quadratura.

prima tecnica: integrare il polinomio di Lagrange

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$w_0 = \int_0^4 \frac{1}{2}(x-2)(x-3)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(x^2-5x+6\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-40+24\right) = \frac{8}{3}$$

Dato che i nodi sono simmetrici rispetto al punto medio dell'intervallo $[0,4]$, è possibile concludere che

$$w_2 = w_0 = \frac{8}{3}$$

per controllo è possibile verificare che risolvendo $\int_0^4 l_2(x)dx$ si ottiene $\frac{8}{3}$.

Similmente, è possibile calcolare w_1 risolvendo $\int_0^4 l_1(x)dx$. Tuttavia, ricordando che $\sum_i w_i = b-a$, si ricava che $w_1 = (b-a)-(w_0+w_2) = 4-\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

seconda tecnica: imporre che la formula sia esatta sui polinomi 1, x e x^2

$$1:\ w_0\cdot 1+w_1\cdot 1+w_2\cdot 1 = \int_0^4 1dx = 4$$

$$x:\ w_0\cdot 1+w_1\cdot 2+w_2\cdot 3 = \int_0^4 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 = 8$$

$$x^2:\ w_0\cdot 1+w_1\cdot 4+w_2\cdot 9 = \int_0^4 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{64}{3}$$

Si ottiene un sistema lineare da risolvere con eliminazione gaussiana:

$$\begin{cases} w_0+w_1+w_2 = 4 \\ w_0+2w_1+3w_2 = 8 \\ w_0+4w_1+9w_2 = \frac{64}{3} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 64/3 \end{array}\right) \Rightarrow A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 52/3 \end{array}\right) \Rightarrow P_{23}A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 52/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 52/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -16/9 \end{array}\right)$$

$$w_2 = -\frac{16}{9}\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{16}{9}\frac{3}{2} = \frac{8}{3}$$

$$w_1 = \left(\frac{52}{3} - 8\frac{8}{3}\right)\frac{1}{3} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

$$w_0 = \left(4 - \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{8}{3}\right)\frac{1}{1} = \frac{8}{3}$$

Per costruzione l'ordine della formula è almeno 2.

Come si comporta con i polinomi di terzo grado?

$$x^3: \ \frac{8}{3}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 8 + \frac{8}{3}\cdot 27 = \int_0^4 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^4 = 64 \Rightarrow \frac{8}{3}(1 - 4 + 27) = 64$$

L'uguaglianza è verificata e quindi la formula è esatta sulla base $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ dei polinomi di terzo grado. Perciò è esatta per tutti i polinomi di grado almeno 3.

Come si comporta con i polinomi di quarto grado?

$$x^4: \ \frac{8}{3}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 16 + \frac{8}{3}\cdot 81 = \int_0^4 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^4 = \frac{1}{5}\cdot 4^5 \Rightarrow \frac{8}{3}(1 - 8 + 81) \neq \frac{1}{5}4^5$$

L'uguaglianza non è verificata e quindi esiste almeno un polinomio di grado 4 per cui la formula non è esatta.

Per questo motivo l'ordine di accuratezza polinomiale è 3.

Esercizio 2:

Classificare, se possibile, la seguente formula di quadratura

$$\int_0^4 f(x)dx \cong w_0 f(0) + w_1 f(2) + w_2 f(3).$$

Soluzione:

È una formula semiaperta (o semichiusa). Non è di Newton–Cotes perché i nodi non sono equidistanti. Inoltre i nodi non sono simmetrici rispetto al punto medio dell'intervallo di integrazione.

Non siamo quindi in grado di classificare questa formula di quadratura.

Esercizio 3:

Osservando che $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, si vuole approssimare $\ln 2$ utilizzando la formula dei trapezi composita.

Si richiede di

- stabilire se la stima è per eccesso o per difetto con considerazioni geometriche;
- dimostrare l'affermazione precedente con considerazioni analitiche;
- determinare il numero di sottointervalli che si devono utilizzare per ottenere un errore minore di 10^{-4}.

Soluzione:

La funzione $\frac{1}{x}$ è monotona decrescente. Inoltre essa è convessa. Per questo motivo, l'errore è sicuramente per eccesso. Infatti, ricordando la definizione di funzione convessa, un segmento che unisca due punti qualsiasi della funzione si trova sempre al di sopra di quest'ultima.

Dimostrazione analitica:

$R_N{}^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)$ dove $c \in (1,2)$ e $h = \frac{b-a}{N}$.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.

$R_N{}^T = -\frac{1}{12}\frac{1}{N^2}\frac{2}{c^3} < 0 \quad \forall N$, $\forall c$. Quindi la stima è per eccesso.

L'errore esatto non è conoscibile, ma è possibile stimarlo:

$R_N{}^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)$ dove $c \in (1,2)$ e $h = \frac{b-a}{N}$

$R_N{}^T = -\frac{1}{12}\frac{1}{N^2}\frac{2}{c^3} = -\frac{1}{6N^2}\frac{1}{c^3}$

$\left|R_N{}^T\right| = \frac{1}{6N^2}\frac{1}{c^3}$

Nella peggiore delle ipotesi $\frac{1}{c^3} = 1$, quindi

$$\left|R_N{}^T\right| \le \frac{1}{6N^2}\cdot 1 = \frac{1}{6N^2}$$

È necessario garantire che

$$\frac{1}{6N^2} \le 10^{-4} \Rightarrow N^2 \ge \frac{10^4}{6} \Rightarrow N \ge \frac{100}{\sqrt{6}} \cong 41$$

Esercizio 4 :

È dato $\int_0^\pi \left(\cos^3 x + \sin^2 x\right) dx$.

Si richiede di

- stimare per eccesso l'errore commesso approssimando l'integrale con la formula dei trapezi composita con $N = 10$ intervalli;
- approssimare l'integrale con la formula di Cavalieri–Simpson composita su $N = 2$ intervalli;
- confrontare in numero di intervalli richiesti nei due casi, nonché in numero di valutazioni di funzione da eseguire, per avere un errore minore o uguale a 10^{-6}.

Soluzione:

L'errore di quadratura per la formula dei trapezi è

$$R_N{}^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c) \text{ dove } c \in (a,b),\ h = \frac{b-a}{N}.$$

Le derivate prima e seconda della funzione sono

$$\begin{aligned}
&f(x) = \cos^3 x + \sin^2 x \\
&f'(x) = 3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x) + 2\sin x\cos x = -3\sin x\cos^2 x + \sin 2x \\
&f''(x) = -3\left(\cos^3 x + \sin x\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)\right) + 2\cos 2x = -3\cos^3 x + 6\sin^2 x\cos x + 2\cos 2x = \\
&= -3\cos^3 x + 6\left(1-\cos^2 x\right)\cos x + 2\cos 2x = -9\cos^3 x + 6\cos x + 2\cos 2x
\end{aligned}$$

Tutte queste funzioni trigonometriche possono essere maggiorate con il valore 1, quindi

$$\left|f'(x)\right| \le 3\left|\cos x\right|^3 + 6\left|\sin x\right|^2\left|\cos x\right| + 2\left|\cos 2x\right| = 3+6+2 = 11.$$

La stima per eccesso dell'errore risulta

$$\left|R_{10}{}^T\right| \le \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\cdot 11 = \frac{11}{1200}\pi^3 \cong 0.28.$$

Per calcolare l'integrale si può applicare direttamente la formula di Cavalieri–Simpson composita:

$$I_2^{\,S} = \frac{h}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\pi\right) + f(\pi)\right).$$

Nel nostro caso $h = \frac{\pi}{2} = \frac{b-a}{N}$, perciò

$$I_2^{\,S} = \frac{\pi}{12}\left(1 + 4\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 2\cdot 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + (-1)\right) = \frac{\pi}{12}\left(1 + \sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} + 2 - 1\right) = \frac{\pi}{2}$$

Per garantire un errore minore di 10^{-6} è sufficiente imporre che $\left|R_N^{\,T}\right| \le 10^{-6}$ e che $\left|R_N^{\,S}\right| \le 10^{-6}$. Si ricorda che $R_N^{\,T} = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c)$ e che $R_N^{\,S} = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(c)$.

Il comportamento dell'errore più critico si ha per il valore massimo della derivata. Infatti è in questa condizione che il modulo dell'errore di quadratura potrebbe diventare maggiore del valore richiesto dal problema. È sufficiente quindi cercare il numero di intervalli necessari usando come valore della derivata proprio il massimo.

Tuttavia non sempre è semplice trovare questo massimo. Nei casi in cui non sia immediato, o ragionevolmente semplice, determinare questo valore studiando l'andamento della funzione $f''(x)$, è sufficiente cercare una maggiorazione M della derivata. Ad esempio, se riesco ad affermare che $\left|f''(x)\right| \le M \quad \forall x \in [a,b]$ allora vale la seguente disuguaglianza $\left|R_N^{\,T}\right| \le \frac{b-a}{12}h^2 M$. Un risultato analogo si trova con $\left|R_N^{\,S}\right|$.

Le derivate della funzione necessarie sono fino alla quarta. Per le prime due si rimanda a quanto ottenuto al primo punto. Le rimanenti sono

$$\begin{aligned}
&f'''(x) = -27\cos^2 x\cdot(-\sin x) + 6(-\sin x) + 4\cos 2x\cdot(-\sin 2x) = \\
&= 27\cos^2 x\sin x - 6\sin x - 4\sin 2x\cos 2x = 27\cos^2 x\sin x - 6\sin x - 2\sin 4x \\
&f^{(4)}(x) = 27\left(2\cos x\cdot(-\sin x)\sin x + \cos^2 x\cos x\right) - 6\cos x - 8\cos 4x = \\
&= 27\left(\cos^3 x - 2\cos x\sin^2 x\right) - 6\cos x - 8\cos 4x
\end{aligned}.$$

Si cerca ora una maggiorazione ragionevole della derivata quarta, dato che la sua espressione piuttosto complessa non permette uno studio di funzione rapido:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \le 27\cdot 3 + 6 + 8 = 81 + 6 + 8 = 95.$$

Utilizzando tale maggiorazione è possibile calcolare il numero di intervalli richiesti e il numero di valutazioni di funzione necessarie nei due casi:

$$\left|R_N{}^T\right| \le \frac{\pi}{2}\frac{\pi^2}{N^2}\cdot 11 = \frac{11}{12}\pi^3 \cdot \frac{1}{N^2}$$
$$\left|R_N{}^S\right| \le \frac{\pi}{2880}\frac{\pi^4}{N^4}\cdot 95 = \frac{95}{2880}\pi^5 \cdot \frac{1}{N^4}.$$

Risolvendo si ha

trapezi: $\frac{11}{12}\pi^3 \cdot \frac{1}{N^2} < 10^{-6} \Rightarrow N^2 > \frac{11}{12}\pi^3 10^6 \Rightarrow N > 10^3\pi\sqrt{\frac{11}{12}\pi} = 5332$;

Cavalieri–Simpson: $\frac{95}{2880}\pi^5 \cdot \frac{1}{N^4} < 10^{-6} \Rightarrow N^2 > \frac{95}{2880}\pi^5 10^6 \Rightarrow N > 10\pi\sqrt[4]{\frac{95}{2880}\pi 10^2} = 57$.

Riassumendo:

	trapezi	Cavalieri–Simpson
numero di intervalli	5332	57
valutazioni di $f(x)$	5333	115

Il risultato ottenuto è ragionevole perché l'errore di Cavalieri–Simpson decresce come h^4, mentre quello della formula dei trapezi tende a zero come h^2.

Esercizio 5:

Per approssimare l'integrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx$ si applichi la formula dei trapezi composita prima con 3 e poi con 4 nodi. Si calcoli in entrambi i casi l'errore commesso confrontando l'approssimazione con l'integrale esatto e si commenti il risultato.

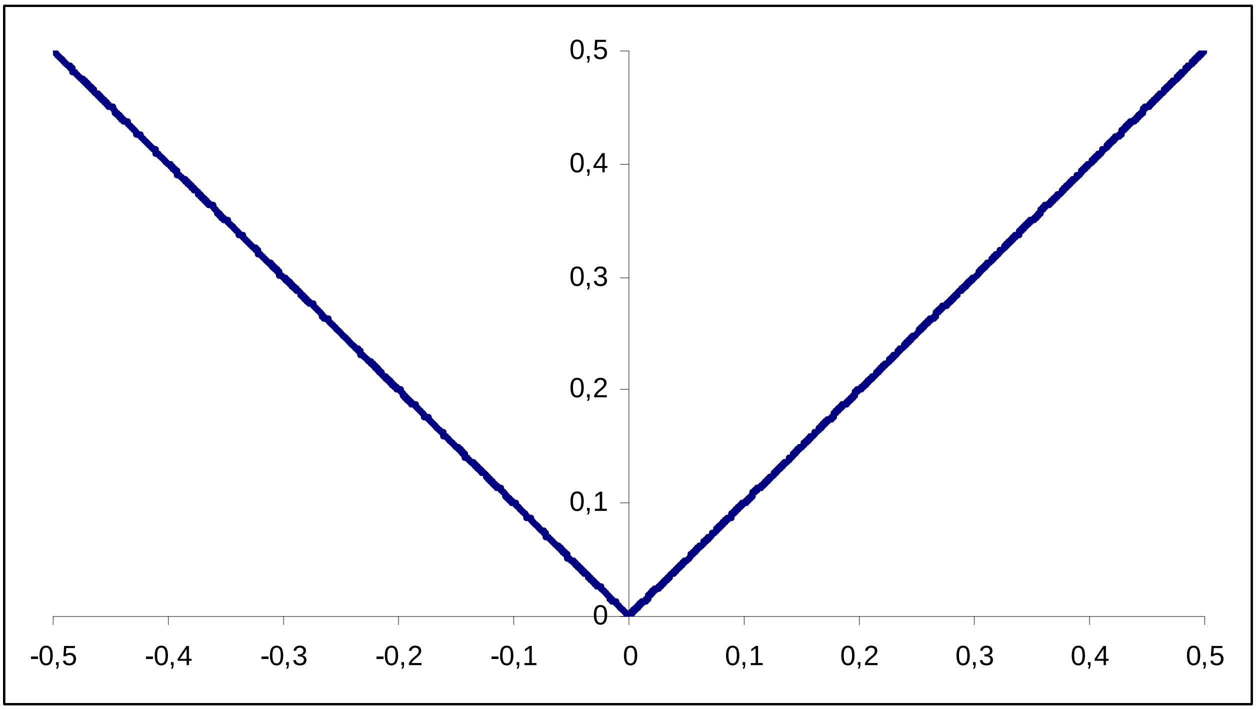
Soluzione:

N.B.: si considereranno solamente nodi equidistanti.

Dato che la funzione è di classe C^0, non è possibile stimare l'errore con la solita formula.

Per prima cosa è necessario calcolare l'integrale esatto:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx = \frac{1}{4}$$



Applicando invece la formula dei trapezi si ottiene:

con 3 nodi: $I_2^T = \frac{h}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)+2f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ dove $h=\frac{b-a}{N}=\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}$

l'errore calcolato è $R_2^T=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

con 4 nodi: $I_3^T=\frac{h}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{6}\right)+2f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{18}$
dove $h=\frac{b-a}{N}=\frac{b-a}{3}=\frac{1}{3}$

l'errore calcolato è $R_3^T=\frac{1}{4}-\frac{5}{18}=-\frac{1}{36}$.

Per capire meglio cosa significano questi risultati si può calcolare l'integrale considerando 5 nodi:

$$I_4^T=\frac{h}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(f\left(-\frac{1}{4}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$
dove $h=\frac{b-a}{N}=\frac{b-a}{4}=\frac{1}{4}$

l'errore calcolato è $R_4^T=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$.

Con un numero di intervalli pari l'errore è nullo; con un numero di intervalli dispari, invece, l'errore è diverso da zero. Infatti, se il punto angoloso della funzione $|x|$ è uno dei nodi, allora l'approssimare la funzione stessa con delle rette (come fa la formula dei trapezi) non genera errori, in quanto non vi sono intervalli che abbiano i due estremi entrambi non nulli e con segni discordi. Al contrario, se il numero di intervalli è dispari, uno di essi si troverà sicuramente "a cavallo" dell'origine e quindi, in quell'intervallo, la formula dei trapezi commetterà un errore. In particolare la stima sarà per eccesso e perciò l'errore sarà negativo.

Esercizio 6 :

Ricavare i pesi della formula di Cavalieri–Simpson.

Soluzione:

La formula generica è

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(a) + w_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_3 f(b).$$

Per calcolare i pesi w_1, w_2 e w_3 si impone che la formula sia esatta sulle funzioni 1, x, x^2:

$$1\colon\ w_1 + w_2 + w_3 = \int_a^b 1dx = b - a$$

$$x\colon\ aw_1 + \frac{a+b}{2}w_2 + bw_3 = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$x^2\colon\ a^2 w_1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 w_2 + b^2 w_3 = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right).$$

Il sistema lineare ottenuto può essere risolto con eliminazione gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & \frac{a+b}{2} & b & \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\ a^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 & \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & \frac{b-a}{2} & b-a & \frac{1}{2}(b-a)^2 \\ 0 & \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{3a+b}{2}\right) & b^2-a^2 & \frac{1}{3}(b-a)\left(b^2-2a^2-ab\right) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} & b-a & \dfrac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\ 0 & 0 & (b-a)\left(\dfrac{b-a}{2}\right) & \dfrac{1}{12}(b-a)^3 \end{array}\right).$$

A questo punto, per ottenere la soluzione $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ è sufficiente effettuare una sostituzione all'indietro.