ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Approssimazione di dati e di funzioni

Esercizio 1:

Sono assegnati i seguenti dati $(-2,-7)$, $(-1,0)$, $(1,2)$, $(2,9)$, $(3,28)$. Si richiede di:

- scrivere il polinomio $p_4(x)$ nella base di Lagrange;
- scrivere il polinomio $p_4(x)$ nella base di Newton;
- aggiungere la coppia $(0,2)$ e scrivere il nuovo polinomio interpolante nella base di Newton.

Soluzione:

Per scrivere il polinomio interpolante nella base di Lagrange dobbiamo determinare le funzioni $l_i(x)$:

$$l_0(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)(-2-3)},\qquad l_1(x)=\frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)(-1-3)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+2)(1+1)(1-2)(1-3)},\qquad l_3(x)=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+2)(2+1)(2-1)(2-3)},$$

$$l_4(x)=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+2)(3+1)(3-1)(3-2)}.$$

Il polinomio interpolante è ora determinato:

$$p_4(x)=-7\cdot l_0(x)+0\cdot l_1(x)+2\cdot l_2(x)+9\cdot l_3(x)+28\cdot l_4(x).$$

Per scrivere il polinomio interpolante nella base di Newton dobbiamo dapprima determinare la tavola delle differenze divise:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,\dots,x_{k+3}]$	$f[x_k,\dots,x_{k+4}]$
-2	-7				
-1	0	$\frac{0+7}{-1+2}=7$			
1	2	$\frac{2-0}{1+1}=1$	$\frac{1-7}{1+2}=-2$		
2	9	$\frac{9-2}{2-1}=7$	$\frac{7-1}{2+1}=2$	$\frac{2+2}{2+2}=1$	
3	28	$\frac{28-9}{3-2}=19$	$\frac{19-7}{3-1}=6$	$\frac{6-2}{3+1}=1$	$\frac{1-1}{3+2}=0$

possiamo ora scrivere il polinomio interpolante prendendo come coefficienti il primo elemento di ogni colonna:

$$p_4(x) = -7 \cdot 1 + 7 \cdot (x+2) - 2 \cdot (x+2)(x+1) + 1 \cdot (x+2)(x+1)(x-1) + 0 \cdot (x+2)(x+1)(x-1)(x-2).$$

Il polinomio appena scritto contiene dieci moltiplicazioni. Possiamo evitare di farle tutte se lo riscriviamo in modo più efficiente: possiamo usare la forma annidata di Ruffini–Horner. Questa forma permette di scrivere solo le moltiplicazioni strettamente necessarie:

$$p_4(x) = -7 + (x+2)(7 + (x+1)(-2 + (x+1)(1 + 0(x-2))))$$

in questo modo sono presenti solo quattro moltiplicazioni.

Aggiungiamo ora il dato $(0,2)$. Aggiorniamo la tavola delle differenze divise:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+3}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+4}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+5}]$
-2	-7					
-1	0	7				
1	2	1	-2			
2	9	7	2	1		
3	28	19	6	1	0	
0	2	$\frac{2-28}{0-3} = \frac{26}{3}$	$\frac{\frac{26}{3} - 19}{0-2} = \frac{31}{6}$	$\frac{\frac{31}{6} - 6}{0-1} = \frac{5}{6}$	$\frac{\frac{5}{6} - 1}{0+1} = -\frac{1}{6}$	$\frac{-\frac{1}{6} - 0}{0+2} = -\frac{1}{12}$

e il nuovo polinomio interpolante nella base di Newton è semplicemente quello vecchio a cui viene sommato un termine:

$$p_5(x) = p_4(x) - \frac{1}{12}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Nella forma annidata di Ruffini–Horner:

$$p_5(x) = -7 + (x+2)\left(7 + (x+1)\left(-2 + (x-1)\left(1 + (x-2)\left(0 - \frac{1}{12}(x-3)\right)\right)\right)\right).$$

Esercizio 2:

Assegnate le coppie $(0,-1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$ determinare la funzione $f_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione:

In questo caso abbiamo

$$\phi_1(x) = 1$$
$$\phi_2(x) = x$$
$$\phi_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Scriviamo la matrice del sistema e il vettore dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

cerchiamo il <u>sistema di equazioni normali</u>:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 30 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 30 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -1 \end{pmatrix}$. Risolviamolo con <u>eliminazione gaussiana senza pivoting</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 0 & 6 \\ 10 & 30 & -2 & 21 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & -2 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 8/5 & 4/5 \end{array}\right).$$

Quindi:

$$c_3 = \frac{4/5}{8/5} = \frac{1}{2},$$

$$c_2 = \left(9 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{10} = 1,$$

$$c_1 = \left(6 - 0 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Riassumendo $c = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

La funzione approssimante risulta essere $f_3(x) = -\frac{4}{5} + x + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Esercizio 3:

Assegnate le coppie $(0,-1)$, $(1,0)$, $(3,-1)$ sull'intervallo $[a,b] = [0,3]$ determinare la funzione spline di ordine 2 interpolante con la seguente condizione aggiuntiva: $s_2^{'}(0) = 1$.

Soluzione:

Scriviamo per prima cosa la formula generica della spline da determinare:

$$s_2(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & x \in [0,1] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & x \in (1,3] \end{cases}.$$

È necessario determinare i sei parametri per conoscere completamente la spline interpolante. Abbiamo bisogno di sei condizioni.

Quattro di queste ci vengono date esplicitamente dal testo:

condizioni di interpolazione

$$s_2(0) = -1$$
$$s_2(1) = 0$$
$$s_2(3) = -1$$

condizione aggiuntiva

$$s_2^{'}(0) = 1.$$

Le due rimanenti possono essere dedotte dal fatto che i due tratti di polinomio interpolante devono raccordarsi correttamente:

condizioni di continuità

$$\begin{aligned} s_2(1^-) &= s_2(1^+) \\ s_2'(1^-) &= s_2'(1^+) \end{aligned}.$$

Quindi le sei equazioni risultano:

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = -1 \\ a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 \\ 2a_1 + b_1 = 2a_2 + b_2 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ b_1 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ 2a_2 + b_2 = 1 \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} c_1 = -1 \\ b_1 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ 2a_2 + b_2 = 1 \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = -1 \end{cases} \end{matrix}$$

Il primo sistema è già risolto. Il secondo può essere risolto applicando <u>l'eliminazione gaussiana</u>:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ 2a_2 + b_2 = 1 \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ -b_2 - 2c_2 = 1 \\ -6b_2 - 8c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ -b_2 - 2c_2 = 1 \\ 4c_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\dfrac{7}{4} \\ b_2 = 1 - 2 \cdot \dfrac{7}{4} = \dfrac{5}{2} \\ a_2 = \left(-\dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{4}\right) \cdot \dfrac{1}{1} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

e la spline interpolante risulta così determinata:

$$s_2(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [0,1] \\ -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{7}{4} & x \in (1,3] \end{cases}.$$

Esercizio 4:

Assegnate le coppie $(1,1)$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2, 2\sqrt{2})$, $(4, 4\sqrt{2})$ determinare i parametri α_1 e α_2 in modo tale che la funzione $f(x) = \alpha_1 x^{\alpha_2}$ approssimi i dati nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione:

Il modello suggerito è non lineare. Possiamo tuttavia ricondurci al caso lineare applicando logaritmi:

$$\log_a y = \log_a(\alpha_1 x^{\alpha_2}) = \log_a \alpha_1 + \log_a x^{\alpha_2} = \log_a \alpha_1 + \alpha_2 \log_a x\,.$$

Chiamiamo $z = \log_a y$, $c_1 = \log_a \alpha_1$ e $c_2 = \alpha_2$:

$$z = c_1 + c_2 \log_a x$$

dove $\phi_1(x) = 1$ e $\phi_2(x) = \log_a x$.

In base ai dati del problema la base del logaritmo da scegliere sarà evidentemente la base due, in questo modo tutte le radici si semplificano:

$$a = 2$$

x_i	1	$\sqrt{2}$	2	4
$z_i = \log_2 y_i$	0	$3/2$	$3/2$	$5/2$

Possiamo ora determinare il <u>sistema di equazioni normali</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 7/2 \\ 7/2 & 21/4 \end{pmatrix}, \quad A^T z = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 29/4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 & 7/2 \\ 7/2 & 21/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 29/4 \end{pmatrix}$. Risolvendolo si determina il vettore $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Una volta risolto il sistema lineare si può risalire ai veri parametri incogniti:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2^{c_1} \\ \alpha_2 = c_2 \end{cases}.$$