ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Sistemi lineari

Esercizio 1:

Date $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- determinare la fattorizzazione $PA = LU$ applicando il pivoting parziale;
- usando la fattorizzazione $PA = LU$, risolvere il sistema lineare $Ax = b$.

Soluzione:

Svolgiamo l'eliminazione gaussiana con pivoting

primo step

$P_1 = P_{13}$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{1/2} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati

secondo step

$P_2 = I$, in pratica non permuto nulla

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati *terzo step*

$P_3 = I$, in pratica non permuto nulla

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{1/2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & -1 \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati

Qui termina l'eliminazione gaussiana.

Le matrici risultano:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = I \cdot I \cdot P_{13} = P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di A

$$\det(PA) = \det(LU) \Rightarrow \det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$
$$(-1) \cdot \det(A) = 1 \cdot (-4) \Rightarrow \det(A) = 4$$

Verifica

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PA$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases},\ \text{dove } Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prima equazione

applichiamo il metodo di sostituzione in avanti

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{0}{1} = 0 \\ y_2 = \dfrac{1-1\cdot y_1}{1} = 1 \\ y_3 = \dfrac{3-0\cdot y_1 - 1\cdot y_2}{1} = 2 \\ y_4 = \dfrac{1-0\cdot y_1 - 0\cdot y_2 - \frac{1}{2}y_3}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

seconda equazione

applichiamo il metodo di sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{0}{1} = 0 \\ x_3 = \dfrac{2-4x_4}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{1-0\cdot x_4 - 0\cdot x_3}{1} = 1 \\ x_1 = \dfrac{0-2x_4 - 0\cdot x_3 - 0\cdot x_2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 :

Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

determinare la fattorizzazione $PA = LU$ applicando il pivoting parziale.

Soluzione:

Svolgiamo l'eliminazione gaussiana con pivoting

primo step

$P_1 = P_{13}$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati

secondo step

$P_2 = I$, in pratica non permuto nulla

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati

terzo step

$P_3 = P_{34}$

$$P_3 A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

i moltiplicatori sono i numeri riquadrati

Qui termina l'eliminazione gaussiana.

Le matrici risultano:

$$U=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&8&1\\0&0&0&15/4\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1/2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1/4&1\end{pmatrix}\ \text{e}\ P=P_{34}\cdot I\cdot P_{13}=P_{34}P_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di A

$$\det(A)=\frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)}=\frac{1\cdot 60}{(-1)^2}=60\,.$$

Esercizio 3:

Dato il sistema $Ax=b$ con $A=\begin{pmatrix}7&2&-3\\3&6&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix}6\\7\\5\end{pmatrix}$

- stabilire se il metodo di Jacobi è applicabile;
- stabilire se il metodo di Jacobi è convergente;
- svolgere due iterazioni sapendo che la soluzione esatta è $x^*=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Soluzione:

Il metodo di Jacobi è applicabile perché $D=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&6&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ è una matrice invertibile.

Il metodo di Jacobi converge perché la matrice A è a predominanza diagonale per righe.

Applichiamo il metodo iterativo componente per componente

ipotizziamo $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{6-2x_2^{(k)}+3x_3^{(k)}}{7}\\[2mm] x_2^{(k+1)}=\dfrac{7-3x_1^{(k)}+2x_3^{(k)}}{6}\\[2mm] x_3^{(k+1)}=\dfrac{5+x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{6}{7} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{7}{6} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 7/6 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda $x^{(2)}$ si opera allo stesso modo.

Risulta evidente che, passando da $x^{(0)}$ a $x^{(1)}$, la distanza relativa fra la soluzione esatta x^* e l'approssimazione ottenuta dal metodo iterativo si è notevolmente ridotta. Proseguendo nelle iterazioni si nota che ci si avvicina sempre di più a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'errore relativo si rimpicciolisce.

Esercizio 4:

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, analizzare se il metodo di Gauss–Seidel converge nella risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con vettore b qualsiasi.

Soluzione:

La richiesta è sensata in quanto la convergenza del metodo non dipende dal vettore dei termini noti, ma solo dalla matrice dei coefficienti del sistema.

Notiamo che la matrice non è a predominanza diagonale né per righe, né per colonne.
Notiamo anche che la matrice non è simmetrica definita positiva, perché già la condizione di simmetria non è soddisfatta.

Costruiamo la matrice di iterazione di Gauss–Seidel

$$B_{GS} = -M_{GS}^{-1} N_{GS} = -(E+D)^{-1} F = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

chiaramente il calcolo di questa matrice è tutt'altro che rapido. Possiamo evitare di calcolarla se ragioniamo sul metodo di Jacobi. Sebbene la matrice A non soddisfi le richieste del teorema di Stein–Rosenberg, essa soddisfa quelle del secondo teorema: gli elementi della diagonale sono tutti non nulli e la matrice è tridiagonale. Quindi:

$$B_J = -M_J^{-1} N_J = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo alcune norme naturali della matrice di iterazione di Jacobi

$$\|B_J\|_1 = \frac{9}{4} > 1$$
$$\|B_J\|_\infty = 3 > 1$$

non possiamo concludere nulla perché le norme non sono minori dell'unità.
Non prendiamo in considerazione la norma spettrale perché il suo calcolo sarebbe più oneroso in termini di calcoli e tempo del calcolo del raggio spettrale di B_J.

Calcoliamo $\rho(B_J)$: determiniamo gli autovalori

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

polinomio caratteristico

$$P_{B_J}(\lambda) = \det(B_J - \lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 + 2)$$

$\lambda = 0$ molteplicità $m = 2$

$\lambda = \pm\sqrt{2}i$

$$\rho(B_J) = \max\left\{|0|, \left|\sqrt{2}i\right|, \left|-\sqrt{2}i\right|\right\} = \sqrt{2}$$

Per il teorema si ha che

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J) = 2 > 1$$

e quindi entrambi i metodi iterativi non convergono.

Esercizio 5:

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, analizzare se il metodo di Gauss–Seidel converge nella risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con vettore b qualsiasi.

Soluzione:

Notiamo che la matrice non è a predominanza diagonale né per righe, né per colonne.
Notiamo anche che la matrice non è simmetrica definita positiva, perché già la condizione di simmetria non è soddisfatta.

Applichiamo il teorema di Stein–Rosenberg

$$B_J = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le norme $\|B_J\|_1$ e $\|B_J\|_\infty$ non danno indicazioni utili.

$$P_{B_J}(\lambda) = \det(B_J - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$\lambda = 0$ molteplicità $m = 2$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho(B_J) = \max\left\{|0|, \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Per il teorema si ha che $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$ e quindi Gauss–Seidel converge, con una velocità di convergenza superiore di quella di Jacobi.