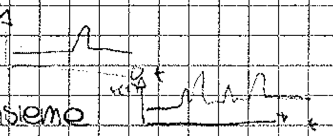
22-03-2010

SIGNAL PROCESSING OF LIFE

Cellule: SEGNALE → contatto tra 2 cellule
uno cellula vede un'altra
le cellule iniziano a lavorare insieme



ANALISI DEI SEGNALI: estrazione di informazioni dal segnale
un sistema di controllo comunica con i sistemi periferici → SEGNALI

feedback = mondo-reale

- MECCANOCETTORI adattamento

Più il segnale è complesso, più un organo è nuovo (nel corpo umano)

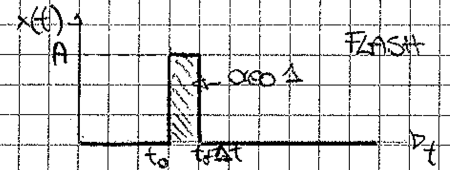
Segnale deterministico (bello)
Segnale patologico → tende verso il caos

SEGNALI

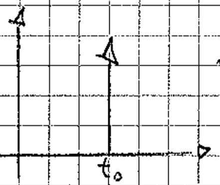
segnale = funzione del tempo

$x(t) = |x(t)| e^{j\varphi(t)}$ segnale complesso

1) FUNZIONI NORMALI
2) DISTRIBUZIONI:



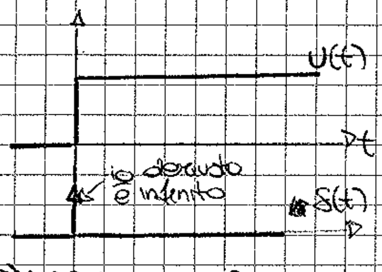
FLASH $t_0 \to 0$, $A \to \infty$



$\delta(t-t_0)$ delta di Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

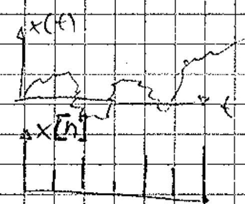
$$\int_{0}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$



$U(t)$ Funzione gradino

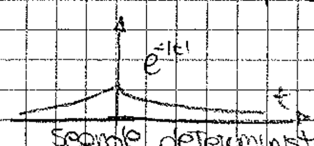
derivato della funzione gradino

3) VARIABILI CASUALI
legate dalle stesse leggi di probabilità
CAMMINATA CASUALE, moto browniano

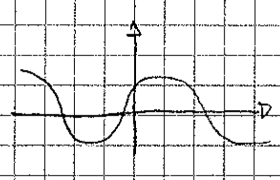


- Segnale → a tempo continuo $t \in \mathbb{R}$
  → a tempo discreto $n \in \mathbb{Z}$

- Segnale → deterministico → periodico
  → non periodico



segnale deterministico
$x(t) = e^{-|t|}$ non periodico



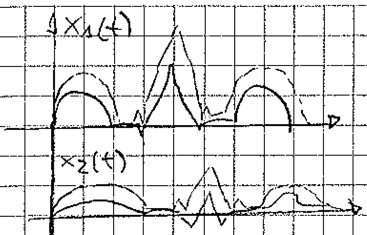
segnale deterministico periodico

$x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ $x(t+T) = x(t)$

→ probabilistico (non esiste una legge esatta per il suo andamento)

STAZIONARIO (le sue proprietà non variano nel tempo)
Rumore bianco della televisione

NON STAZIONARIO (le proprietà variano nel tempo → cambia la media)



ENERGIA DEL SEGNALE

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- $x(t) = e^{-|t|}$ segnale a tempo continuo deterministico non periodico a energia finita

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|t|}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 2 \cdot \lim \int_0^b e^{-2t} dt = - \left[e^{-2t} \right]_0^{\infty} = 1$$

- Segnale → a energia finita
  → a energia infinita

- $x(t) = A$ costante $\quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = A^2 \left[t \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$ a energia infinita

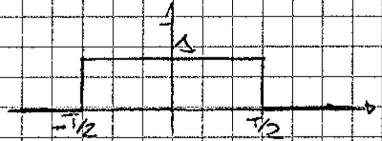
$$\mathcal{E}_T = A^2 T \qquad \lim_{T \to \infty} A^2 \cancel{T} \cdot \frac{1}{\cancel{T}} = A^2$$

POTENZA DEL SEGNALE

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_T}$$

$\mathcal{E}_T$ ENERGIA SUL PERIODO (SUPPORTO)

- Segnale → a potenza finita
  → a potenza infinita

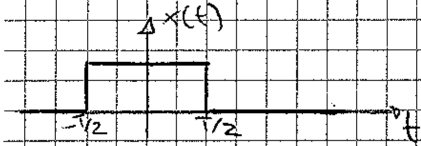


SEGNALE PORTA: a tempo continuo deterministico non periodico

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1^2 dt = T$$

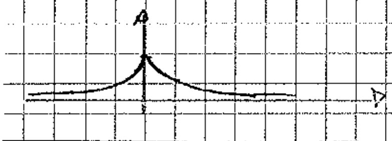
25-02

RIPASSO

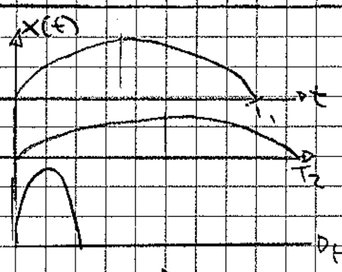


FUNZIONE PORTA $\quad P_T(t)$

FUNZIONE GRADINO $\quad u(t)$



$e^{-|t|}$

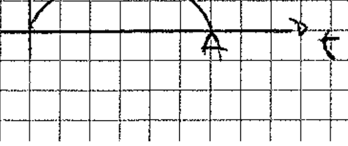


miele

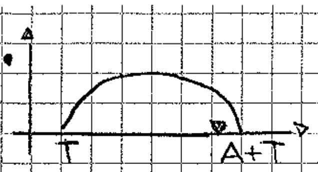
pasta

zucchero: diventa disponibile in un tempo brevissimo (saccarosio)

PROPRIETÀ DEI SEGNALI

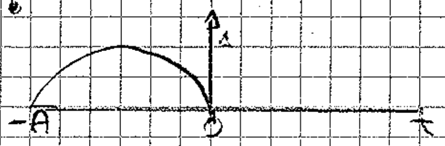


- $x(t-T)$ $\quad T>0$ RITARDO

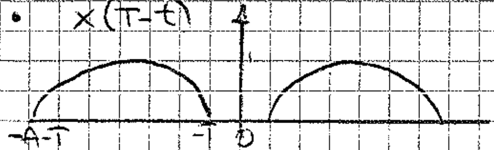


- RIBALTAMENTO

$x(-t)$

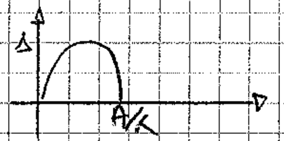


- $x(T-t)$

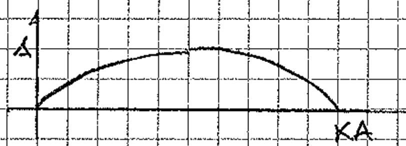


- $x(Kt)$ $\quad K>1$ SCALAMENTO

$Kt = A$
$t = A/K$

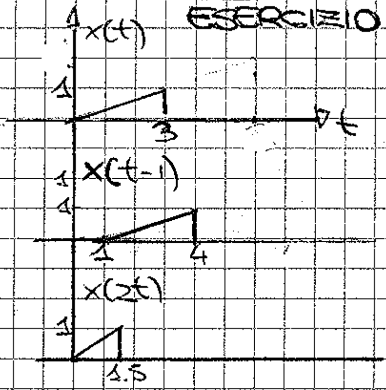


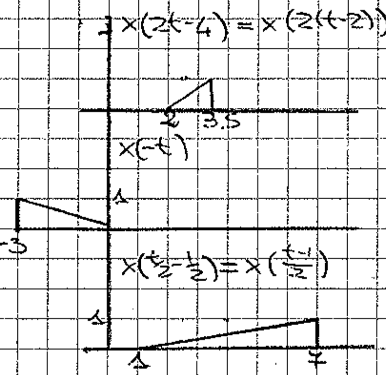
- $x(t/K)$ $\quad K>1$



PRIMA IL RITARDO POI LO SCALAMENTO
Devo raccogliere

ESERCIZIO



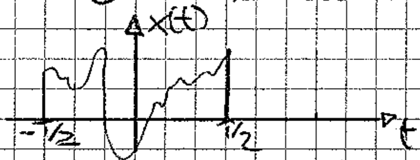


SPAZIO DEI SEGNALI

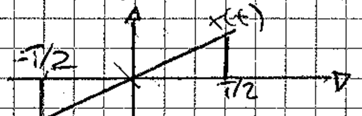
- $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$
- $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$ $\quad \Rightarrow \exists$ LO SPAZIO DEI SEGNALI
- $\exists\ \underline{0}$ $\quad S_1,\ \exists\ \underline{S_1} : S_1 + \underline{S_1} = \underline{0}$

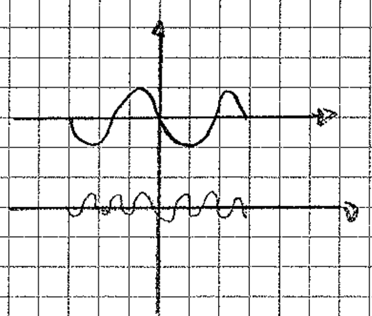
Posso identificare delle basi nelle quali scomporre il mio segnale

Scegliere una base di vettori



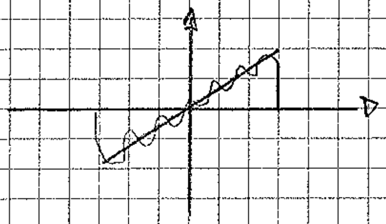
$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mu_i N_i$$





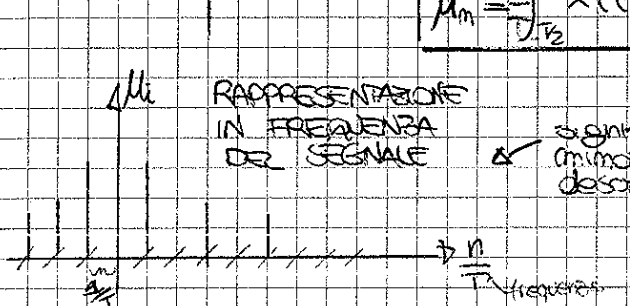
Sinusoidi con periodo diverso
$\Downarrow$
le somma

Sommando sinusoidi con periodo sempre minore si ottiene



$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}}$$

$$\boxed{\mu_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\,dt}$$ COEFFICIENTI DI FOURIER



RAPPRESENTAZIONE IN FREQUENZA DEL SEGNALE

significa che le sinusoidi a frequenza minore hanno più "importanza" per descrivere la $x(t)$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\,dt\; e^{j2\pi\frac{n}{T}t}}$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO

Generalizzando per tutti i segnali (anche non quelli periodici) quindi per $T\to\infty$

per $T\to\infty$ $$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt \cdot e^{j2\pi f t}\,df}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}\,df \qquad X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt$$

TRASFORMATA DI FOURIER DEL SEGNALE

$x(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} w_i \mu_i$

Contiene le informazioni su dove è distribuita l'energia del segnale

01-03-2010

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\,df}$$ ANTITRASFORMATA DI FOURIER

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

LINEARITÀ

~~$X(f) = X(f)$~~

$X(f)=F\{x(t)\}$

$$\underbrace{F\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}}_{\text{combinazione lineare}}=a_1F\{x_1(t)\}+a_2F\{x_2(t)\} \qquad \forall a_1, a_2$$

OPERATORE

$F\{x(t)\}=x(t)+7$

$F\{a_1x_1+a_2x_2\}=a_1x_1+a_2x_2+7$

$F\{x_1\}=a_1(x_1+7)$ non è lineare!

$F\{x_2\}=a_2(x_2+7)$ $F\{a_1x_1+a_2x_2\}\neq F\{x_1\}+a_2F\{x_2\}$

$x(t)\to F\{x(t)\}=2x(t)+3$

$F\{a_1x_1+a_2x_2\}=2(a_1x_1+a_2x_2)+3$

$F\{a_1x_1\}=2a_1x_1+3a_1$

$F\{a_2x_2\}=2a_2x_2+3a_2$

$2(a_1x_1+a_2x_2)+3\neq 2a_1x_1+3a_1+2a_2x_2+3a_2$!

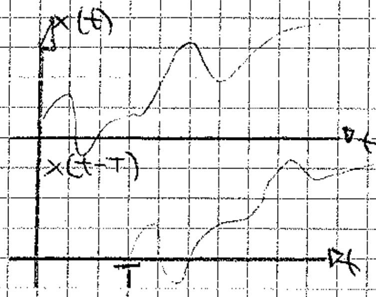
Dim: $F\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))e^{-j2\pi ft}dt =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a_1x_1(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} a_2x_2(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-j2\pi ft}dt\right)a_1 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-j2\pi ft}dt\right)a_2$$

È LINEARE

RITARDO



$F\{x(t-T)\}$

$s = t-T \quad t = s+T \quad ds = dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-T)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi f(s+T)}ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(s)e^{-j2\pi fs}}\, e^{-j2\pi fT}ds = e^{-j2\pi fT}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi fs}ds$$

$$\underline{F\{x(t-T)\} = e^{-j2\pi fT}X(f)}$$

→ esponenziale complesso a modulo unitario
→ cambio solo la FASE

MODULAZIONE

- $X(t)e^{-j2\pi f_0 T}$

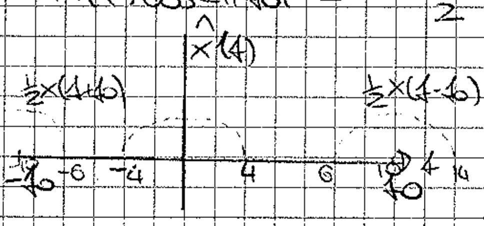
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi \overbrace{(f-f_0)}^{f'}t}dt = X(f') = X(f-f_0)$$

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\boxed{\text{FORMULA DI EULERO} \quad \cos\alpha = \frac{e^{-j\alpha}+e^{j\alpha}}{2}}$$

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t = \frac{x(t)e^{-j2\pi f_0 t}}{2} + \frac{x(t)e^{j2\pi f_0 t}}{2} \Rightarrow \frac{X(f+f_0)+X(f-f_0)}{2}$$

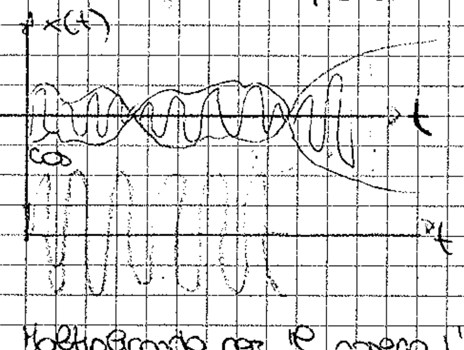
$$\underline{x(t)e^{j2\pi f_0 T} \to X(f-f_0)}$$



$x(t)\cos 2\pi f_0 t$

$f_0 = 10\,kHz$

Per traslare un segnale (in frequenza) basta moltiplicarlo per un esponenziale complesso → ma è più facile "moltiplicarlo" per un coseno
Non si usa il seno perché introduce una rotazione di 90° (-j).



MODULAZIONE: Do le informazioni di x(t) con la frequenza del coseno

Moltiplicando per il coseno l'energia del segnale si dimezza

SCALAMENTO

$x(t) \to X(f)$

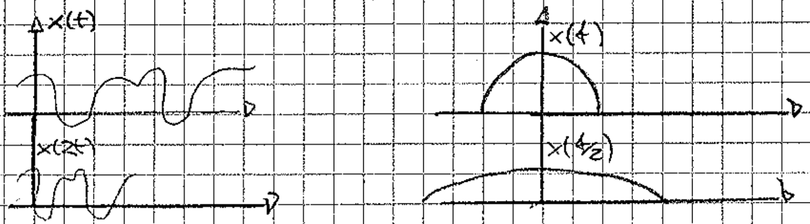
$\underline{x(tk) \to \frac{1}{k}X\left(\frac{f}{k}\right)}$

$x(t) \to X(f)$

$\underline{x\left(\frac{t}{k}\right) \to k\cdot X(kf)}$

Dim: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(kt)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, e^{-j2\pi f \frac{s}{k}} \cdot \frac{1}{k}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k}\, x(s)\, e^{-j2\pi \left(\frac{f}{k}\right) s}\, ds = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$

$s = kt \quad t = \frac{s}{k} \quad ds = k\cdot dt$



Dim: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t}{k}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} k\, x(s)\, e^{-j2\pi (fk) s}\, ds = k\, X(fk)$

$s = \frac{t}{k} \quad t = k s \quad dt = k ds$

PRODOTTO CONVOLUZIONE

$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

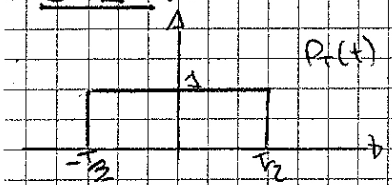
$$\underline{y(t) = x(t) * h(t)}$$ PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$$\underline{Y(f) = X(f)\, H(f)}$$

Nel dominio della frequenza, i prodotti di convoluzione diventano prodotti semplici

$$\underline{x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, h(t-s)\, ds}$$

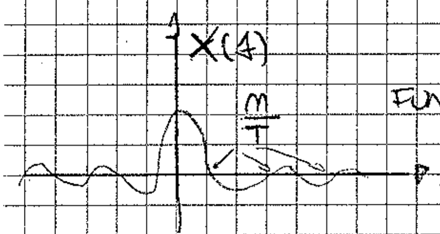
DUALITÀ



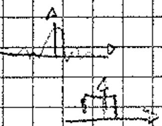
$\int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1\, e^{-j2\pi f t}\, dt = X(f)$

$X(f) = \left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f \frac{T}{2}}}{-j2\pi f} = \boxed{\frac{\sin \pi f T}{\pi f}}$

FUNZIONE SENO-CARDINALE

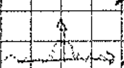


FUNZIONE SENO-CARDINALE



$x(t) \to X(f)$

$X(t) \to x(-f)$



la trasformata di Fourier di una funzione porta è una funzione seno-cardinale
" " " " " " seno-cardinale è " " porta (a meno del segno)

SINTESI PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 04-03-2010

1) $x(-t)$ $X(-f)$ INVERSIONE DEGLI ASSI

2) $x(t \pm \theta)$ $X(f)\, e^{\pm j2\pi f \theta}$ RITARDO

3) $x(kt)$ $\frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$ SCALAMENTO

4) $x(t)\, e^{\pm j2\pi f_0 t}$ $X(f \mp f_0)$

5) $x(t) \cos 2\pi f_0 t$ $\frac{1}{2} X(f + f_0) + \frac{1}{2} X(f - f_0)$ MODULAZIONE

DOMINIO del TEMPO
x , y

DOMINIO delle FREQ
X , Y

dominio del tempo
- continuo: ()
- discreto: []

6) $x(t) * h(t)$ $\qquad$ $X(f) \cdot H(f)$ $\qquad$ PRODOTTO CONVOLUZIONE

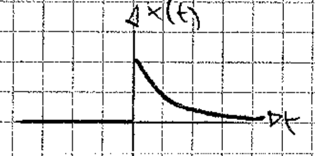
7) $\frac{d}{dt}(x(t))$ $\qquad$ $j2\pi f X(f)$

8) $X(t)$ $\qquad$ $x(-f)$

La trasformata di Fourier è definita solo per i segnali che convergono

Esempi:

• $x(t) = u(t)e^{-kt}$ $\quad k>1$

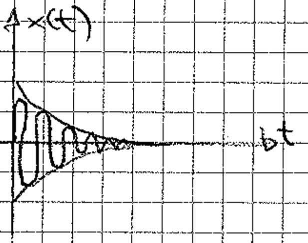


$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-kt} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{t(-k-j2\pi f)} dt =$$

$$= \left[\frac{1}{-k-j2\pi f} e^{-t(k+j2\pi f)} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(\frac{1}{-k-j2\pi f} \right) = \frac{1}{k+j2\pi f}$$

• $x(t) = u(t)e^{-kt}\cos(2\pi f_0 t)$



$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-kt} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kt} \cdot e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kt} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t}$$

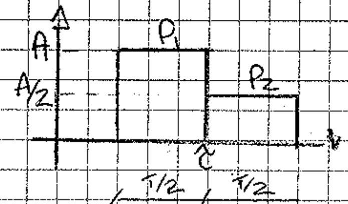
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(k - j2\pi f_0 + j2\pi f)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(k+j2\pi f_0 + j2\pi f)} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k - j2\pi f_0 + j2\pi f} + \frac{1}{k + j2\pi f_0 + j2\pi f} \right]$$

OPPURE SI POSSONO UTILIZZARE LE PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER (5)

$$\frac{1}{k+j2\pi f} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{k+j2\pi(f+f_0)} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+j2\pi(f-f_0)}$$

• $x(t)$



$$P_{T/2}\left(t - \left(\tau - \frac{T}{4}\right)\right) A + \frac{A}{2} P_{T/2}\left(t - \left(\tau + \frac{T}{4}\right)\right)$$

$$X(f) = A \frac{\sin \pi f T/2}{\pi f} e^{-j2\pi f(\tau - T/4)} + \frac{A}{2} \frac{\sin \pi f T/2}{\pi f} e^{-j2\pi f(\tau + T/4)}$$

__DELTA DI DIRAC__ : PROPRIETÀ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(0) \cdot \delta(t) dt = x(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt}_{=1} = x(0)$$

$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$

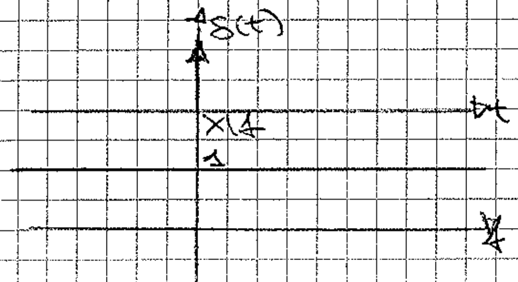
PROPRIETÀ:

1.
2. Porta di altezza infinita e larghezza infinitesima
3. $\delta(t)$ è ovunque zero tranne che in 0

5. $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$

$x(t) = \delta(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = e^{-j2\pi f 0} = 1 \qquad \boxed{F\{\delta(t)\} = 1}$$

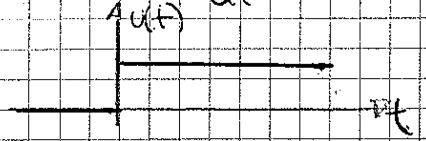


la cosa più simile è la radiazione di fondo dell'universo

- $x(t) = \delta(t - t_0) \longrightarrow X(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi f t_0}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt) \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \frac{n}{T}}$$

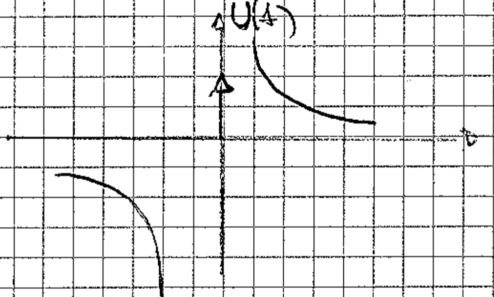
- $\delta(t) = \dfrac{du}{dt}$



- $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds \qquad \frac{1}{2} X(0)\,\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$

$x(t) = \delta(t) \qquad X(f) = 1$

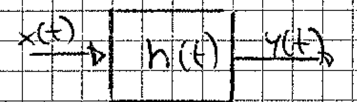
$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1\, \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} = U(f)$$



08-03-2010

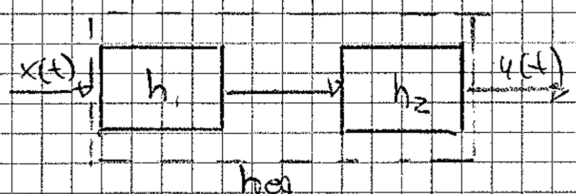
SISTEMI LINEARI

I



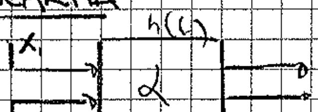
$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

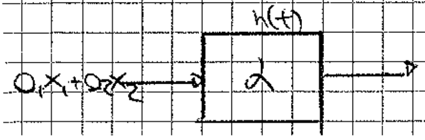


$h_{eq} = h_1 * h_2$

LINEARITÀ



$\alpha\{x_1\}a_1 +$
$\alpha\{x_2\}a_2$



$\alpha\{a_1 x_1 + a_2 x_2\}$