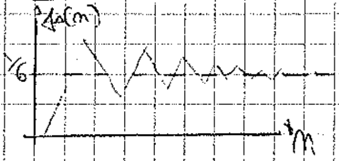
PROBABILITÀ

Frequenza statistica :

evento A n: numero di prove n_A numero di volte in cui avviene A

$f_A(n)$ frequenza statistica di A $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$



Lancio di un dado

$P(A) = \lim_{n \to +\infty} f_A(n)$ probabilità dell'evento A

$0 \leq P(A) \leq 1$ $\emptyset$ evento nullo $P(\emptyset) = 0$

S evento universo $P(S) = 1$

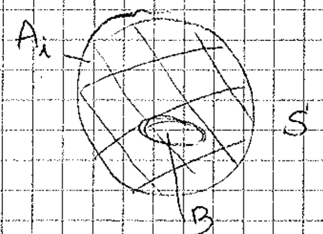
se A e B sono disgiunti $[A \cap B = \emptyset] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

INDIPENDENZA STATISTICA: $A \perp B$ se $P(A \cap B) = P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA: $P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$

se $A \perp B \Rightarrow P(A|B) = P(A)$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE



$\bigcup_i A_i = S$

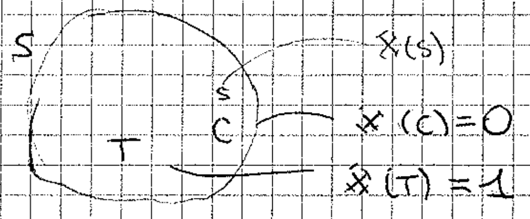
$A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

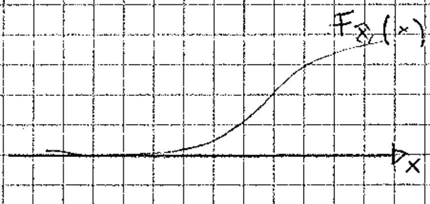
$P(B) = \sum_i P(B, A_i) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i)$

TEOREMA DI BAYES

$P(A_i | B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_k P(B|A_k) P(A_k)}$

VARIABILI CASUALI



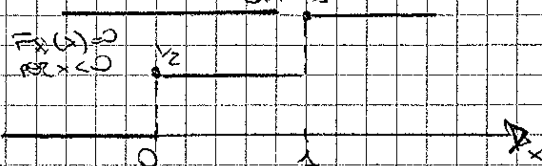


DISTRIBUZIONE CUMULATIVA: $F_X(x) \triangleq P(X \leq x)$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ: $f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}$

$P(T) = \frac{1}{2}$ T: 1

$P(C) = \frac{1}{2}$ C: 0

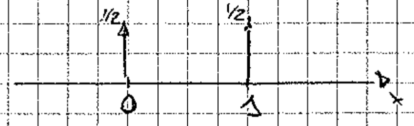


DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

$F_X(x)$ è non decrescente

$0 \le F_X(x) \le 1$

$F_X(-\infty) = 0 \qquad F_X(+\infty) = 1$



DENSITÀ DI PROBABILITÀ

La densità di probabilità è diversa da zero solo dove può avvenire un evento

$f_X(x) \ge 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

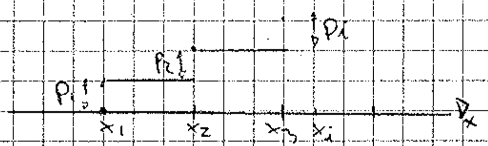
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$

$P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$

VARIABILI CASUALI DISCRETE

X vale $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

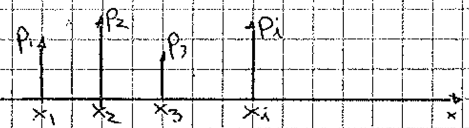
$p_i = P(X = x_i)$



$F_X(x) = \sum_i p_i\, u(x - x_i)$

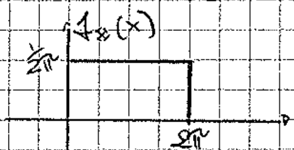
se la distribuzione cumulativa è fatta a gradini $\rightarrow$ variabile discreta

$f_X(x) = \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)$

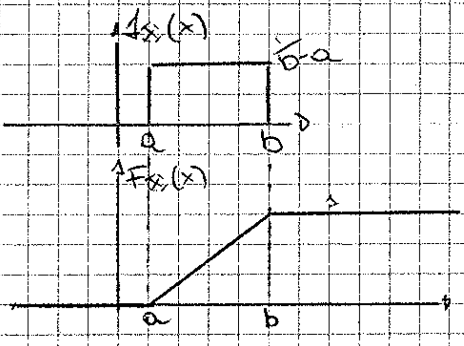


$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \sum_i p_i = 1$

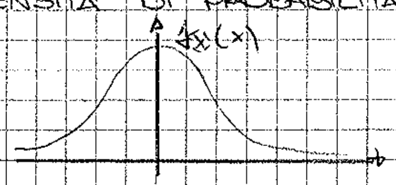
• DENSITÀ DI PROBABILITÀ UNIFORME



$\Rightarrow$



• DENSITÀ DI PROBABILITÀ GAUSSIANA



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ: valor medio

σ^2: varianza

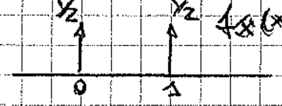
MEDIA: $E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)\,dx = \sum_i p_i \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \delta(x - x_i)\,dx}^{x_i} = \sum_i p_i x_i$$

Se gli eventi sono equiprobabili $\quad p_i = \frac{1}{N} \quad \Rightarrow E\{X\} = \sum_i \frac{x_i}{N}$

$$E\{X\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \sum_i x_i \underbrace{p(X = x_i)}_{p_i}$$

$$E\{g[X]\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx = \sum_i g(x_i)\, \underbrace{p(X = x_i)}_{p_i} = \mu_X$$



$x_1 = 0 \qquad p(x_1) = p_1 = \frac{1}{2}$

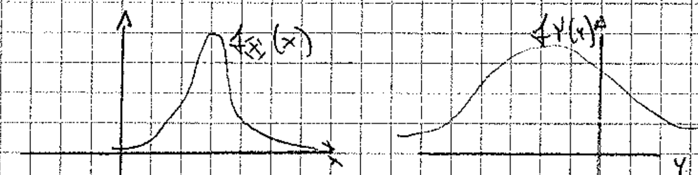
$x_2 = 1 \qquad p(x_2) = p_2 = \frac{1}{2}$

$$E\{x\} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

VALORE QUADRATICO MEDIO: $E\{|X|^2\} = E\{X^2\}$ se X è reale

VARIANZA: $\sigma_X^2 \triangleq E\{|X - \mu_X|^2\}$

se X è reale $\rightarrow \sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\,dx$

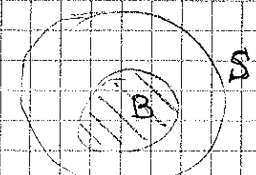


$$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

$$\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = E\{X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2\} = E\{X^2\} - 2\mu_X E\{X\} + \mu_X^2 =$$
$$= E\{X^2\} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 =$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \mu_X^2}$$

DISTRIBUZIONI CONDIZIONATE



$$F_X(x \mid B) \triangleq P(X \le x \mid B)$$

$$f_X(x \mid B) \triangleq \frac{d F_X(x \mid B)}{dx}$$

$$E\{g(X) \mid B\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x \mid B)\,dx$$

COPPIE DI VARIABILI CASUALI

$$F_{XY}(x,y) \triangleq P(X \le x,\ Y \le y)$$

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

MEDIA D'INSIEME (VALORE MEDIO O ATTESO) $\rightarrow$ media pesata

$$E\{g(X)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

MEDIA TEMPORALE

$$< g[x(t)] > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g[x(t)]\,dt$$

POTENZA MEDIA

$P(x) = < |x(t)|^2 > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$

PROCESSI CASUALI

REALIZZAZIONI

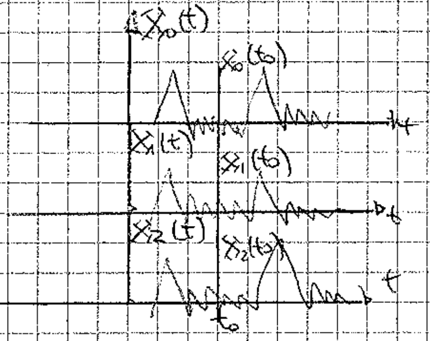
componente temporale

componente casuale spesso non si scrive x non appesantire

PROCESSO CASUALE : $X(t, s)$

Il processo casuale è un insieme di forme d'onda

una realizzazione è una particolare forma d'onda



Un processo osservato in un particolare istante di tempo è una variabile casuale

$X(t, s)$: PROCESSO CASUALE

$X(t, s_0)$: FORMA D'ONDA DETERMINATA (REALIZZAZIONE)

$X(t_0, s)$: VARIABILE CASUALE

$X(t_0, s_0)$: NUMERO

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

$F_{X(t_0)}(x) \triangleq P(X(t_0) \le x)$

$F_{X(t)}(x) \triangleq P(X(t) \le x)$ si scrive $F_X(x, t)$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ : $f_X(x,t) = \dfrac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$

VALORE ATTESO O MEDIA D'INSIEME : $E\{g[X(t)]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x,t)\,dx$

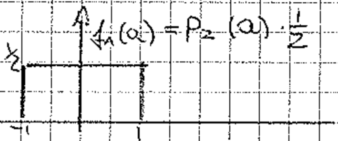
$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,t)\,dx = \mu_X(t)$

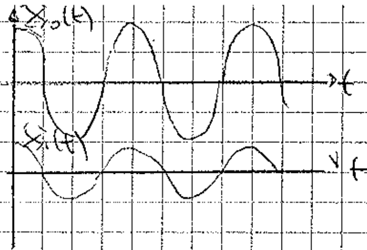
se $f_X(x,t)$ non varia con il tempo il processo è STAZIONARIO DEL 1° ORDINE
$= f_X(x) \Rightarrow \mu_X = \text{cost}$

il RUMORE TERMICO è un processo stazionario del 1° ordine

$E\{X^2(t)\} = \text{cost}$ se è stazionario del 1° ordine

$X_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

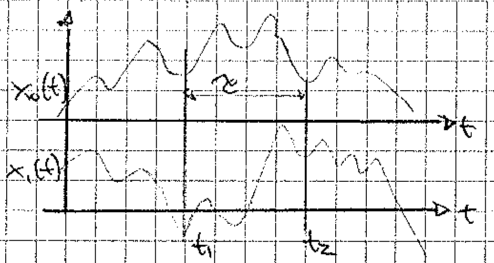




$X_1(t) = A\cdot K \qquad f_X(x) = \frac{1}{|K|} f_A\left(\frac{x}{K}\right)$

$$f_X(x;t) = \frac{1/2}{|\cos 2\pi f_0 t|} P_2\left(\frac{x}{\cos(2\pi f_0 t)}\right)$$

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,t)\,dx = E\{A\cos(2\pi f_0 t)\} = E\{A\}^{\nearrow 0}\cos(2\pi f_0 t) = 0$$



$f_X(x;t)$ 1° ORDINE

$X_1 = X(t_1)$

$X_2 = X(t_2)$

$f_{x_1,x_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 2° ORDINE

DENSITÀ DI PROBABILITÀ $f_{x_1,\dots x_m}(x_1,\dots x_m;\ t_1,\dots t_m)$ m-ESIMO ORDINE

se $f_X(x;t) = f_X(x)$ PROCESSO STAZIONARIO DEL 1° ORDINE

t_1
$t_2 = t_1 + \tau$ se $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2;t_1,t_1+\tau) = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2,\tau)$ il processo è STAZIONARIO del 2° ORDINE

$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$ MEDIA

$E\{|X(t)|^2\}$ VALOR QUADRATICO MEDIO

$\sigma_X^2(t^*) = E\{|X(t) - \mu_X(t)|^2\}$ VARIANZA

$= E\{|X(t)|^2\} - |\mu_X(t)|^2$

se $x(t)$ è reale $\sigma_X^2(t) = E\{X^2(t)\} - \mu_X^2(t)$

Definite per un solo istante di tempo

AUTOCORRELAZIONE DEL PROCESSO

$$E\{X(t_1)\,X(t_2)^*\} = R_X(t_1,t_2)$$

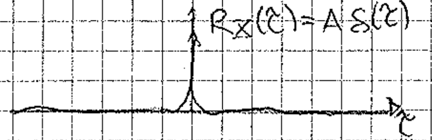
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_{X_1,X_2}(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2-t_1) = R_X(\tau)$

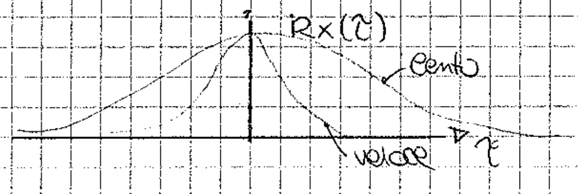
se $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau)$
$E\{X(t)\} = \mu_X$ $\Rightarrow$ IL PROCESSO È STAZIONARIO IN SENSO LATO (WSS) wide sense stationary

se un processo è stazionario del 2° ordine $\Rightarrow$ è stazionario in senso lato

Il rumore termico $\Rightarrow$ WSS



Il processo varia più in fretta $\rightarrow$ l'autocorrelazione scende velocemente



Dato un processo WSS:

- $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$
- se $X(t)$ è reale, $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
- $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} E\{X(t_1)\cdot X(\underbrace{t_2}_{t_1+\tau})\} = \lim_{\tau\to\infty} \underbrace{E\{X(t_1)\}}_{\mu_X} \underbrace{E\{X(t_1+\tau)\}}_{\mu_X} = \mu_X^2$

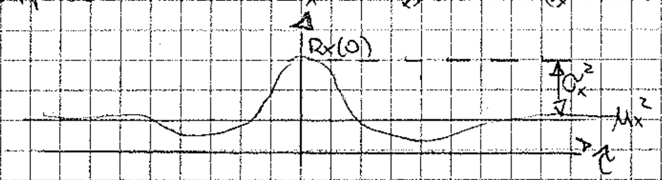
$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$

Per un processo generico

- $R_X(t_1, t_1) = E\{X(t_1)\,X(t_1)^*\} = E\{|X(t_1)|^2\} =$ VALOR QUADRATICO MEDIO

se il processo è WSS: $R_X(0) = E\{|X(t)|^2\}$ VALORE QUADRATICO MEDIO

Per un processo WSS $\quad \sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty)$



DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad \text{processo WSS}$$

Rumore termico: $R_X(\tau) = A\,\delta(\tau)$

$\Downarrow$

$S_X(f) = A \qquad$ è una costante

Il rumore termico si chiama PROCESSO BIANCO [ho tutte le frequenze $\rightarrow$ tutti i colori