

MECCANICA DEI FLUIDI

Fluidi: stato di aggregazione della materia / non è capace di mantenere la propria forma

→ scorrono, fluiscono sotto l'azione di forze

forze intermolecolari + deboli che nei solidi

FLUIDI → **Liquidi**: incompressibili → mantengono il volume [forze intermolecolari limitate a molecole vicine]
 → **gas**: forze intermolecolari trascurabili, comprimibili e non preservano il volume

Elemento di volume dV : volume molto piccolo da ρdV : macroscopico (in una goccia) ma ancora sufficientemente grande da contenere molte molecole da poter essere considerato continuo.

In questa approssimazione, il fluido è descritto in termini di 2 proprietà:
DENSITA' e PRESSIONE

DENSITA' DI MASSA (MASSA VOLUMICA): $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ per liquidi ρ uniforme → INCOMPRESSIBILI

per gas $\rho(\vec{r}, t)$ → COMPRESSIBILI

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

PRESSIONE: l'alterazione dello stato di moto del fluido è descritta da una forza distribuita in modo continuo sulla superficie che lo racchiude.
 → un fluido non può sostenere l'azione di una forza localizzata in un punto

$P_{media} = \frac{\Delta F}{\Delta S}$ pressione → è una quantità scalare

• ΔF componente normale a ΔS della forza totale su ΔS

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{m \cdot l \cdot t^{-2}}{l^2} = m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2} \quad SI: \frac{N}{m^2} = Pa \quad \text{PASCAL}$$

bar: $1 \text{ bar} = 10^5 Pa$

atmosfera: $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 Pa$

mmHg = tor = $\frac{1}{760} \text{ atm}$

FLUIDI IN QUIETE

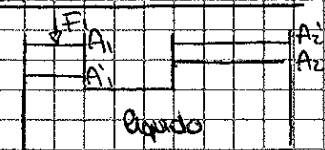
La forza totale su ogni parte del fluido è nulla → EQUILIBRIO IDROSTATICO

se non agiscono forze esterne $\Rightarrow P$ UNIFORME

PRINCIPIO DI PASCAL

Un cambiamento di pressione in una parte di fluido si trasmette inalterato in tutto il volume del fluido e alle pareti del contenitore

MARTINETTO IDRAULICO



$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{se } A_2 \gg A_1$$

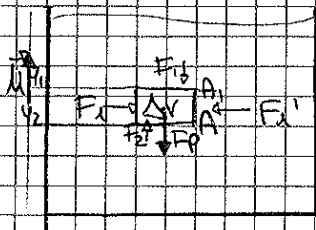
$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \gg F_1$$

Liquido incompressibile $\Rightarrow P = \text{costante}$

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 \quad \Delta y_1 = A_1 y_1 = A_2 y_2 = \Delta y_2 \quad y_2 = \frac{A_1}{A_2} y_1 \ll y_1$$

Lavoro fatto dal pistone A_2 : $L_2 = F_2 y_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \frac{A_1}{A_2} y_1 = F_1 y_1 = L_1$

EQUILIBRO IDROSTATICO IN PRESENZA DI FORZA PESO



Consideriamo l'elemento di volume V $\rho = \text{uniforme}$

Studiamo le forze che agiscono su ΔV

$$\Delta V = A(y_1 - y_2)$$

equilibrio per $F_1 = F_2'$

$$y: \vec{F}_1 = (-p_1) \cdot A, \quad \vec{F}_2 = +p_2 \cdot A, \quad \vec{F}_p = -\mu \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot g$$

equilibrio in direzione y : $p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + \rho \cdot \Delta V \cdot g$

$$(p_2 - p_1) \cdot A = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2) \cdot A \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2)$$

LEGGE DI STEVINO

$y_2 = y_1 - h$ h misura la profondità

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h$$

- La pressione in un qualsiasi punto in equilibrio idrostatico dipende solo dalla PROFONDITÀ

A quale profondità devo scendere in acqua per avere p doppia della $p_{atmosferica}$?

$$p_0 = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

$$p = 2p_0 = 2 \text{ atm}$$

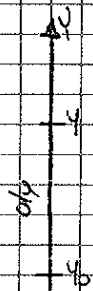
$$p - p_0 = \rho \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{p - p_0}{\rho \cdot g} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m}$$

Fossa delle Marianne $h = 11.3 \text{ km} = 11300 \text{ m}$

$$p - p_0 = \rho \cdot g \cdot h$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h + p_0 = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11.3 \cdot 10^3 \text{ m} + 10^5 \text{ Pa} = 1.1 \cdot 10^8 \text{ Pa} + 10^5 \text{ Pa} = 1.1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$



Calcoliamo la pressione dell'aria in funzione di quota

$$p - p_0 = -\rho \cdot g \cdot (y - y_0) = p(p) = k \cdot p$$

$$= -\rho(p) \cdot g \cdot (y - y_0)$$

$$\Rightarrow dp = -\rho(p) \cdot g \cdot dy \quad dp = -k \cdot g \cdot p \cdot dy$$

$$\frac{dp}{p} = -k \cdot g \cdot dy$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -k \cdot g \int_{y_0}^y dy$$

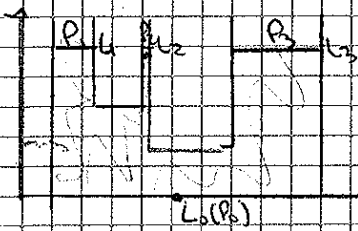
$$\ln \frac{p}{p_0} = -k \cdot g \cdot (y - y_0)$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -k \cdot g \cdot (y - y_0)$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-k \cdot g \cdot (y - y_0)}$$

$$p = p_0 \cdot e^{-k \cdot g \cdot (y - y_0)}$$

VASI COMUNICANTI



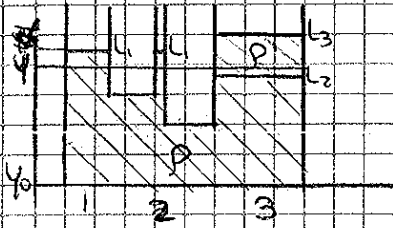
$$P_1 = P_2 = P_3 = P_{0tm}$$

$$P_1 = P_0 + \rho g(L_1 - l_0)$$

$$P_2 = P_0 + \rho g(L_2 - l_0)$$

$$P_3 = P_0 + \rho g(L_3 - l_0)$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 = L_3$$



Calcoliamo la pressione all'altezza y nei 3 vasi

$$P_2 - P_1 = \rho g(y - y_2)$$

$$P_1(y) = P_0 - \rho g y = P_1 + \rho g(L_1 - y)$$

$$P_3(y) = P_0 - \rho g L_2 - \rho g(y - L_2) = P_1 + \rho g(L_3 - y) \neq P_1(y)$$

$$P_0 - \rho g y = P_1 + \rho g(L_1 - y)$$

$$P_0 - \rho g L_2 - \rho g(y - L_2) = P_1 + \rho g(L_3 - y)$$

$$\rho g L_2 - \rho g y = P_1 - P_0 + \rho g L_3 - \rho g y$$

$$(\rho - \rho') g L_2 = \rho g L_3 - \rho g L_1$$

$$\rho(L_2 - L_1) = \rho'(L_2 - L_3)$$

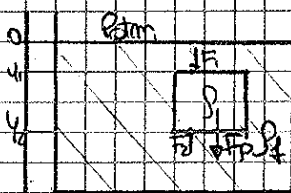
$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{L_2 - L_1}{L_2 - L_3} = \frac{L_3 - L_2}{L_3 - L_1}$$

$$\rho' > \rho \Rightarrow L_1 - L_2 > L_3 - L_2$$

$$\rho < \rho \Rightarrow L_1 < L_3$$

$$P_2 - P_1 = \rho g(y - y_2)$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



Forze esterne sul corpo

$$F_p = mg \text{ verso il basso}$$

Forze di pressione esercitate dal fluido

$$F_1 = P_1 A \downarrow$$

$$F_2 = P_2 A \uparrow$$

$$P_1 = P(y_1) = P_{atm} + \rho g y_1$$

$$P_2 = P(y_2) = P_{atm} + \rho g y_2$$

Forza totale verso l'alto

$$F = F_2 - F_1 - mg = (P_2 - P_1)A - mg = (\rho g h)A - mg$$

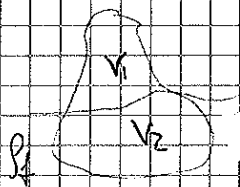
$$F = (\rho_l - \rho) g A h$$

$\rho > \rho_l$: corpo affonda

$\rho < \rho_l$: galleggia

SPINTA DI ARCHIMEDE

$$F_A = \rho g A h$$



$$V = V_1 + V_2$$

$$\text{Forze sul corpo} \left\{ \begin{array}{l} F_a = mg = \rho V g \downarrow \\ F_a = P_2 V_2 g \uparrow \end{array} \right.$$

$$\text{Equilibrio} \quad \rho V_1 g = \rho_2 V_2 g \quad \uparrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho}{\rho_2} = 1 - \frac{V_1}{V}$$

STRUMENTI PER MISURARE LA PRESSIONE

pressione \rightarrow manometria

pressione atmosferica \rightarrow barometria

TORRICELLI \rightarrow tubo chiuso

$$P_a = P_c = P_{Hg} g h$$

DINAMICA DEI FLUIDI

Condizioni STAZIONARIE: densità e velocità del fluido sono funzioni solo delle coordinate dell' punto (= dell' elemento di volume)

\rightarrow In condizioni stazionarie ogni elemento di fluido segue una ben determinata traiettoria (LINEA DI FLUSSO)

FLUIDO PERFETTO: incompressibile, non viscoso, in moto stazionario e irrotazionale

\downarrow
conserva l'energia meccanica

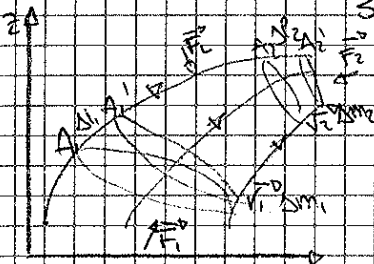
\downarrow
ogni dV ha momento angolare nullo rispetto a ogni punto

STAZIONARIO

Linee di flusso sono tangenti a \vec{v} in P

2 linee di flusso non si possono mai intersecare

TUBO DI FLUSSO: insieme di linee di flusso attraverso superficie A
Sup. esterne di tubo di flusso non può mai essere attraversato



Consideriamo un tubo di flusso / \vec{v} costante su $A \perp$

Δt piccolo

$$\Delta Q_1 = v_1 \Delta t$$

$$\Delta Q_2 = v_2 \Delta t$$

Suppogo no pareti né sorgenti: ρ non dipende da t

Conservazione della massa:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\Delta \rho_1 = A_1 \rho_1 v_1 \Delta t = A_1 \rho_1 v_1 \Delta t$$

$$\Delta \rho_2 = A_2 \rho_2 v_2 \Delta t = A_2 \rho_2 v_2 \Delta t$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$

equazione continuità

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \underline{Av = Q \text{ costante}}$$

CONSERVAZIONE ENERGIA: BERNOULLI

Forze esterne che agiscono su un tubo di flusso tra A_1 e A_2

① $F_1 = P_1 A_1$ opera a \vec{v} moto

② $F_2 = -P_2 A_2$ si oppone al moto

③ $\vec{F} \perp \vec{v}$

④ $F_{par} = \Delta m g = \rho A_1 v_1 g \Delta t$ $F_{ex} = mg$ $m = \rho \cdot v \cdot A$ (A' e A)

Lavoro totale di forze esterne in Δt

① $U = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta r}_1 = P_1 A_1 v_1 \Delta t$

② $L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta r}_2 = -P_2 A_2 v_2 \Delta t$

③ $\vec{F}_c \cdot (\vec{v} \Delta t) = 0$ ($\vec{F} \perp \vec{v}$)

④ $L_p = E_p(z_1) + E_p(z_2) = \rho_1 g A_1 v_1 \Delta t z_1 - \rho_2 g A_2 v_2 \Delta t z_2$

$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = (\rho_1 A_1 v_1 - \rho_2 A_2 v_2 + \rho_2 g A_1 v_1 z_1 - \rho_2 g A_2 v_2 z_2) \Delta t$

$= E_k(v_1) - E_k(v_2) = \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 =$

$= \frac{1}{2} \rho A_2 v_2 \Delta t v_2^2 - \frac{1}{2} \rho A_1 v_1 \Delta t v_1^2$

PORTATA
 $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$

$\Rightarrow Q \Delta t [P_1 - P_2 + \rho g z_1 - \rho g z_2] = [\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2] Q \Delta t$

$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{costante}$

• se $v=0$ o $v_1=0, v_2=0 \Rightarrow$ legge di STEVINO

$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2)$

⑤ $v_1 \ll v_2$ $\Delta A \ll A$

Velocità di efflusso?

Consideriamo un tubo di flusso che collega A a ΔA

equazione continuità ~~$\rho A v_1 = \rho \Delta A v_2$~~ $A v_1 = \Delta A v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{\Delta A}{A} v_2 \rightarrow 0$

$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$

$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = P_1 - P_2 + \rho g (z_1 - z_2) = P_1 - P_2 + \rho g h$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$

$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g h$

$v_2 = \sqrt{2gh}$

TEOREMA DI TORRICELLI

TUBO DI VENTURI



$z_1 = z_2$

$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2$

$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$

$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \rho \frac{S_1^2}{S_2^2} v_1^2 + P_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right] v_1^2$

$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right]$

$P_1 + \frac{1}{2} \rho \frac{v_1^2}{S_2^2} = P_2 + \frac{1}{2} \rho \frac{v_1^2}{S_1^2}$

$\Rightarrow P + \frac{\rho Q^2}{2 S^2} = \text{costante}$

Quando S diminuisce P diminuisce (r aumento)