ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le equazioni di Maxwell permettono di calcolare campo magnetico e campo elettrico una volta che si conosce la densità di carica e di corrente.

Le equazioni di Maxwell contemplano la possibilità di propagazione del campo elettrico e magnetico nel vuoto.

EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO

(Onde elettromagnetiche libere)

I $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$

II $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

III $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

IV $\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

studio soluzioni piane

I) $\dfrac{\partial E_x}{\partial x}=0$

II) $\dfrac{\partial B_x}{\partial x}=0$

III) a) $\dfrac{\partial B_x}{\partial t}=0$ b) $\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$ c) ...

IV) ...

Se il campo elettrico è del tipo

$\vec{E}=\vec{E}(x,t)$ e $\vec{B}=\vec{B}(x,t)$ cioè non dipendono da y e z

Si ha soluzione piana se il campo ha lo stesso valore su tutto un piano

Scriviamo le equazioni per soluz. piane.

I) $\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0$

E_y non dipende da y, idem per E_z; quindi

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Quindi diventa

$$\boxed{\mathrm{I}) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0}$$

La <u>seconda equazione</u> diventa

$$\boxed{\mathrm{II}) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0}$$

per lo stesso motivo.

La <u>terza equazione</u>

$$\mathrm{rot}\,E = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} {=0} & \frac{\partial}{\partial z} {=0} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

Pongo $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ perché E_x, E_y, E_z non dipendono da y e z

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(E_z \vec{j} - E_y \vec{k}\right) = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{k} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$$

Perciò ottengo:

III

$$\boxed{\begin{aligned} &a)\quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ &b)\quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ &c)\quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned}}$$

Quarta equazione -

$$a)\quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad b)\quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$c)\quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Trovate nello stesso modo della 3ª equazione

E_x e B_x non dipendono da x, quindi sono costanti, ma un campo elettrico costante è creato da cariche infinite su un piano ma questa possibilità è esclusa per ipotesi quindi

$$E_x = 0, \qquad \underbrace{B_x = 0}$$

la sua derivata è uguale a 0 quindi deve essere costante un campo magnetico costante non può esistere in assenza di corrente quindi è nullo

Quindi si ha che

$E_y(x,t)$, $E_z(x,t)$

$B_y(x,t)$, $B_z(x,t)$

a partire dalle 3ª e 4ª equazione di

Maxwell. Ricapitoliamo

III) b) $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$ IV) b) $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$

c) $\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ c) $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$

Ora derivo rispetto al tempo la 3b.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(3b): \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}(4c): \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \cancel{\epsilon_0\mu_0} \end{cases}$$

Otteniamo perciò che

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\cancel{\partial x}\partial t^2}$$

Quindi: $$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}}$$

Ora deriviamo la 3b rispetto ad x e la 4c rispetto a t

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(3b): \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial B_y}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t}(4c): \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \cancel{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x \partial t} = \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z{}^2}{\partial t^2}}$$

Quindi
$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\frac{\partial E_z}{\partial t^2}}$$

Ho separato le equazioni di B_y ed E_z, ma ho pagato il prezzo di avere equazioni del II ordine.

Faccio la stessa operazione ~~pe~~ con le equazioni 3c) e 4b)

e si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

Per determinare E_y, E_z, B_y, B_z devo risolvere le 4 equazioni. Per simmetria basta risolvere una delle quattro. (che è una equazione di Laplace). derivata 2ª dell'

$f=f(x,t)$ se soddisfa
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0,\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

allora f è del tipo $f=f(x-ct)$

dimostriamolo.

Chiamo $(x-ct)=u$

Calcolo esplicitamente $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial f}{\partial u}\right) = -c\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial u} =$$

$$= -c\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right) = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{\cancel{c^2}}\cancel{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Verificato

Un equazione di Laplace comporta un fenomeno ondoso con velocità di propagazione c.

Quindi il campo elettrico ed il campo magnetico sono funzioni che rappresentano onde con velocità $c = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ nel vuoto. 5

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 300000 \ Km/s$$ velocità della luce.

E_y, E_z, B_y, B_z si propagano lungo l'asse x con velocità della luce.

Le equazioni di Maxwell non determinano la forma d'onda del campo elettrico e magnetico.

Bisogna misurare il campo elettromagnetico nello spazio all'istante $t=0$. Negli istanti successivi il campo viene semplicemente traslato.

$$E = E_y(x-ct)\hat{u}_y + E_z(x-ct)\hat{u}_z$$

$$B = B_y(x-ct)\hat{u}_y + B_z(x-ct)\hat{u}_z$$

Troviamo una relazione tra E e B

3b) $$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial u}}$$

$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial E_z}{\partial u} \partial u$$

$$= -\frac{1}{c} E_z$$

Quindi $$B_y = -\frac{1}{c} E_z$$

3c) Se parto dalla 3c ed eseguo la stessa operazione ottengo:

$$B_z = \frac{1}{c} E_y$$

Le tre equazioni dicono che le funzioni B_y e B_z sono proporzionali alle componenti del campo elettrico. Quindi ci basta trovare uno dei due campi in $t=0$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \overbrace{E_z}^{(x-ct)} \hat{u}_y + \frac{1}{c} \overbrace{E_y}^{(x-ct)} \hat{u}_z$$

Proprietà:

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$
$$B = -\frac{1}{c} E_z \hat{u}_y + \frac{1}{c} E_y \hat{u}_z$$

1)
$$\begin{cases} E^2 = E_y^2 + E_z^2 \\ B^2 = \frac{1}{c^2} E_z^2 + \frac{1}{c^2} E_y^2 = \frac{1}{c^2} E^2 \end{cases}$$

Quindi:

$$B = \frac{1}{c} E$$

2)
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = (E_y, E_z) \cdot \left(-\frac{1}{c} E_z, \frac{1}{c} E_y\right) =$$
$$= -\frac{1}{c} E_y E_z + \frac{1}{c} E_y E_z = 0$$

Quindi $\vec{E} \perp \vec{B}$

Le equazioni di Maxwell implicano che campo elettrico e magnetico sono perpendicolari.

3) $\vec{E} \wedge \vec{B} = \left(E_y \vec{u}_y , E_z \vec{u}_z \right) \wedge \left(-\frac{1}{c} E_z \hat{u}_y , \frac{1}{c} E_y \hat{u}_z \right) =$

$$= \frac{1}{c} E_y^2 \hat{u}_x + \frac{1}{c} E_z^2 \hat{u}_x = \frac{E_y^2 + E_z^2}{c} \hat{u}_x =$$

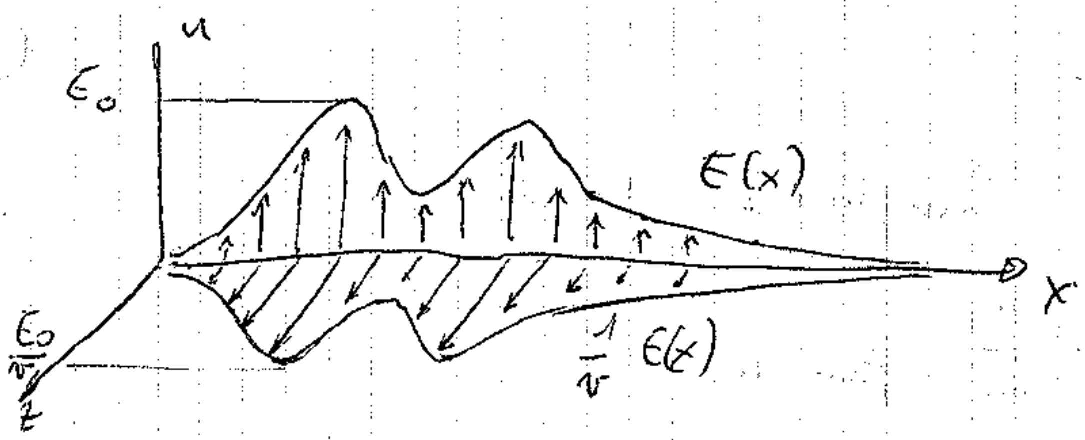
$$= \frac{E^2}{c} \hat{u}_x$$

Quindi il prodotto esterno è $\frac{E^2}{c} \hat{u}_x$ cioè il prodotto esterno $\vec{E} \wedge \vec{B}$ danno un vettore lungo la direzione di propagazione dell'onda

$t = 0$

$$\begin{cases} \vec{E} = E_y \left(x - v(t) \right) \hat{u}_y & t \neq 0 \\ \vec{B} = \frac{1}{v} E_y \left(x - v(t) \right) \hat{u}_z & t \neq 0 \end{cases}$$

in $t = 0$ $\begin{cases} \vec{E} = E_y(x) \hat{u}_y \\ \vec{B} = \frac{1}{v} E_y(x) \hat{u}_z \end{cases}$



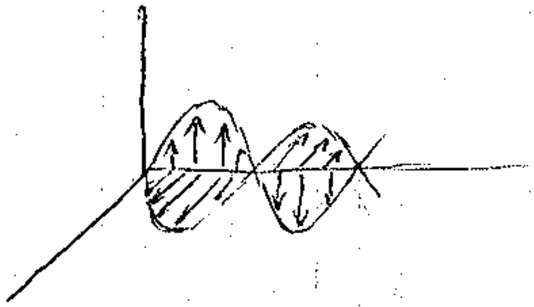
ONDE ARMONICHE

$t = 0$

$$\begin{cases} \cancel{\vec{E} = E_y(x) + E_z(x)} \\ \cancel{\vec{B} = E_z(x) + E_y(x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E} = E_{y_0} \sin(kx)\hat{u}_y + E_{z_0} \sin(kx + \delta)\hat{u}_z \\ \vec{B} = \end{cases}$$

$t \neq 0$

$$\begin{cases} \vec{E} = E_{y_0} \sin[k(x - vt)]\hat{u}_y + E_{z_0} \sin[k(x + vt) + \delta]\hat{u}_z \\ \vec{B} = \end{cases}$$



$$E = E_{y_0}[\sin(kx - \omega t)] + E_{z_0} \sin(kx - \omega t + \delta)$$

k n° d'onda

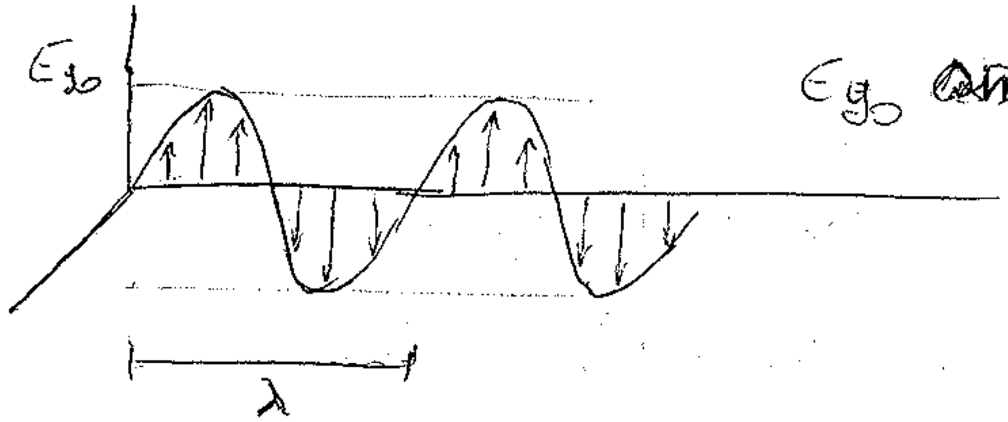
ω pulsazione

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ lunghezza d'onda

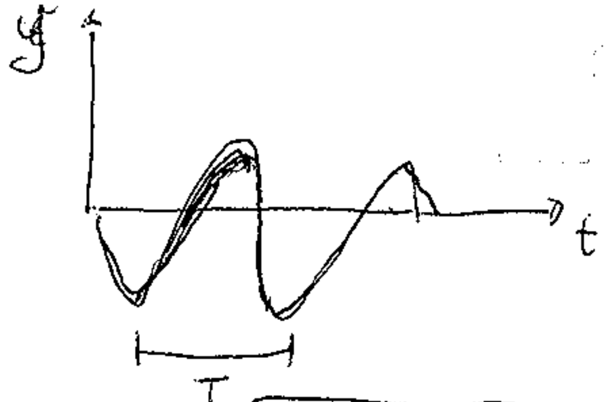
$T = \cancel{\frac{2\pi}{2\pi}} \frac{2\pi}{\omega}$ periodo

$\nu = \frac{1}{T}$ frequenza

$\cancel{\lambda}$ $\begin{cases} \lambda = vT \\ \lambda\nu = v \end{cases}$



$E_{y_0}\ \sin(kx)$



$E_{y_0}\ \sin(-\omega t)$

Ampiezza max. $E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$

<u>Casi:</u> A) $\delta = 0, \pi$

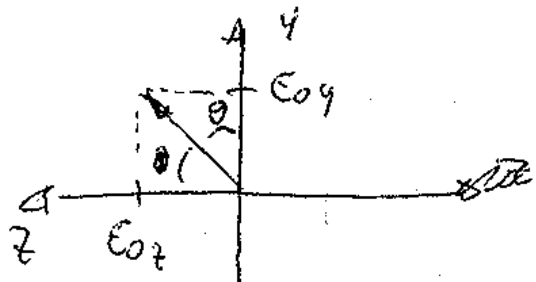
$\delta = 0 \quad \vec{E} = E_{0y} \sin(kx - \omega t)\, \hat{u}_y + E_{0z} \sin(kx - \omega t)\, \vec{u}_z$

$\delta = \pi \quad \vec{E} = E_{0y} \sin(kx - \omega t)\, \hat{u}_y - E_{0z} \sin(kx - \omega t)\, \vec{u}_z$

$E_z = \pm E_{0z} \sin(kx - \omega t)$

$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm \operatorname{tg}\theta$$



Ho polarizzazione rettilinea

B) $\delta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad E_y = E_{y_0} \sin(kx - \omega t)\hat{u}_y + E_{z_0} \cos(kx - \omega t)\hat{u}_z$$

$$\delta = \frac{3}{2}\pi \quad E = E_{y_0} \sin(kx - \omega t)\hat{u}_y - E_{z_0} \cos(kx - \omega t)\hat{u}_z$$

$$E_y = E_{y_0} \sin(kx - \omega t)$$

$$E_z = \pm E_{z_0} \cos(kx - \omega t)$$

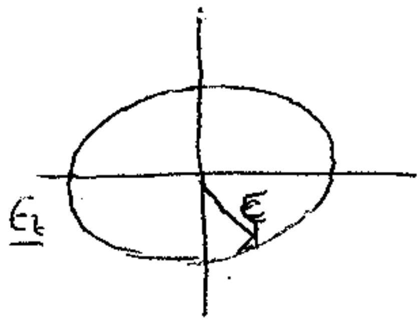
$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \pm \cos(kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2(kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = \sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t) = 1$$



$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 1$$

E appartiene sempre all'ellisse

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 1$$

Polarizzazione ellittica di $\vec{E}$

VETTORE di POYNTING

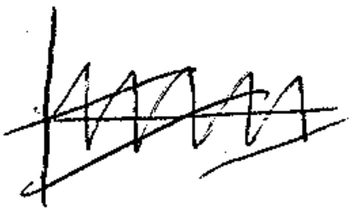
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\wedge\vec{B} \quad \text{Poynting}$$

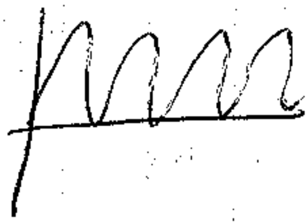
// all'asse x (direzione onda elettromagnetica)

$$\cancel{\vec{S} = \frac{1}{\mu} E^2 \vec{v}} \qquad \vec{S} = \epsilon E^2 \vec{v}$$

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$S = \epsilon_0 E^2 v = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)\,\vec{v}$$





$$\cancel{S_m = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)\, v}$$

$$S_m = \epsilon_0 E_0^2 v \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\overbrace{kx - \omega t}^{z})\,dt =$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 v \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega T}\sin[\omega t]\cos[\omega t]\right] =$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 v$$

$$E_1 = A_1 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$E_2 = A_2 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -kx - \varphi_1 \\ \alpha = -kx - \varphi_2 \end{cases}$$

INTERFERENZE

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$= A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\cos(\alpha_1, \alpha_1) A_1 A_2}$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin(\alpha_1) + A_2 \sin(\alpha_2)}{A_1 \cos(\alpha_1) + A_2 \cos(\alpha_2)}$$

caso semplice

$$A_1 = A_2 = A_0$$

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 2A_0 \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

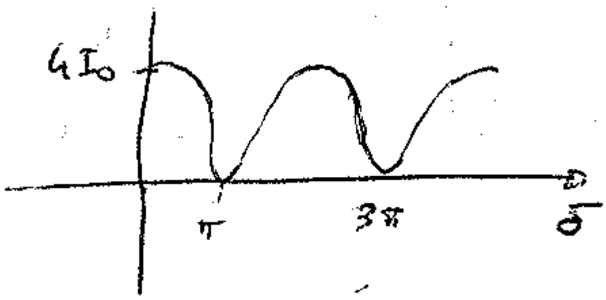
$$E = 2A_0 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

$$I = 4 A_0^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)$$

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\Downarrow$$

$$I = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



Se $\delta = \pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ interferenza distruttiva

Se $\delta = 0, 2\pi, \ldots$ interferenza ~~distru~~ costruttiva

$$\delta = k(x_1 - x_2) - (\phi_1 - \phi_2) = \pm 2\pi n$$

SPETTRI D'ONDA

elevata frequenza