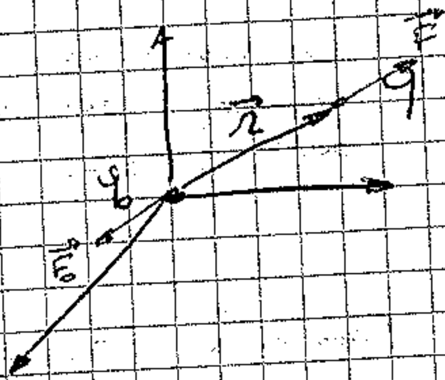
FORZA ELETTRICA ~~GNETICA~~

$$F = K\frac{q_0\, q}{r^2} \qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99\cdot 10^{9}\ \frac{N\,m^2}{C^2}$$

Guardare su libro definizione operativa Coulomb.
La dipendenza proporzionale è stata verificata sperimentalmente con molta accuratezza.

Legge di Coulomb



$$\vec{F} = \frac{q_0\, q}{r^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \dots}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Alcune volte: $\vec{F} = K\frac{q_0\, q}{r^3}\,\vec{r}$

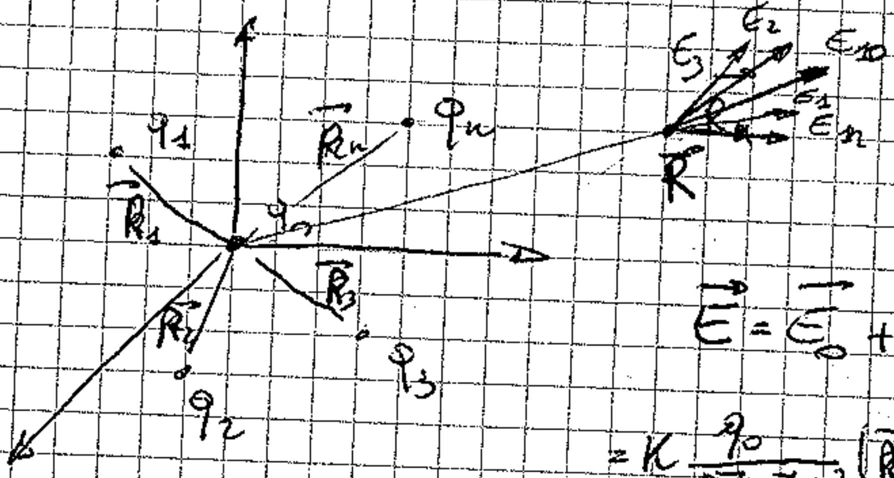
Concentriamo l'attenzione sulla carica q
(considero q_0 unitaria)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{q_0}{r^3}\,\vec{r} \quad \text{campo elettrico}$$

Il campo è la forza che sente una carica unitaria.
Il campo è creato da 1 carica

puntiforme ed è detto "radiale". (1

Principio di sovrapposizione degli effetti:
un punto in un corpo è la somma vettoriale dei campi presenti.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

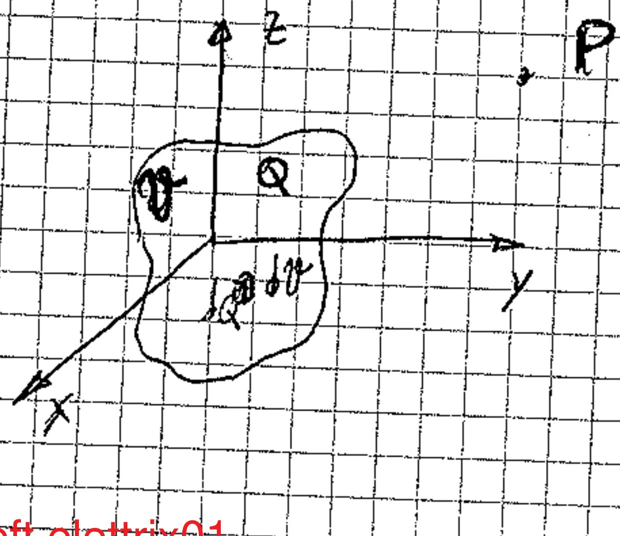
$$= K \frac{q_0}{|\vec{R}-\vec{R}_0|^3}(\vec{R}-\vec{R}_0) + K \frac{q_1}{|\vec{R}-\vec{R}_1|^3}(\vec{R}-\vec{R}_1) +$$

$$+ \dots + K \frac{q_n}{|R-R_n|^3}(\vec{R}-\vec{R}_n) = K \sum_{i=0}^{n} \frac{q_i}{|R-R_i|^3}(\vec{R}-\vec{R}_i) =$$

$$= K \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i}{r_i^3}\, \vec{r}_i$$

dove $\vec{r}_i = \vec{R} - \vec{R}_i$

Caso corpo continuo



$$N\, dV \to V$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$N \to \infty$$
$$dV \to 0$$

$$dQ \propto dV$$
$$\Downarrow$$
$$dQ = \rho\, dV$$ densità di carica

Se il corpo è carico uniformemente

$$\rho = \frac{Q}{\mathcal{V}}$$

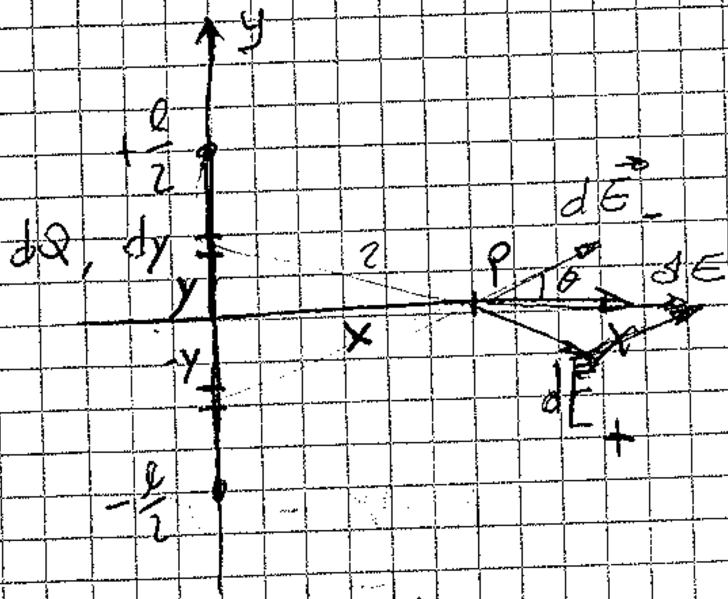
Se conosciamo la densità di carica

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} dQ = Q$$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = Q$$

$$\vec{E} = K \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho \, d\mathcal{V}}{r^3} \vec{r} \right)$$

① Corpo carico uni-dimensionale (filo carico)



Calcolo campo elettrico in P

$l,\ Q,$

$dQ = \rho\, dy = \lambda\, dy =$

densità carica lineare

$= \frac{Q}{l} dy$

$$dE_+ = K \frac{dQ}{r^2} = K \frac{\lambda\, dy}{r^2}$$

$$dE_- = K \frac{dQ}{r^2} = K \frac{\lambda\, dy}{r^2}$$

$$dE = 2K \frac{\lambda\, dy}{r^2} \cos\theta$$

$$E = \int dE = \int 2k \frac{\lambda\, dy}{r^2} \cos\theta =$$ (3)

$$r = \frac{x}{\cos\theta} \qquad y = x \,tg\,\theta .$$

$$= 2k \int \frac{\lambda\, d(x\, tg\,\theta)}{\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \cos\theta = ⊛$$

$$dy = \frac{d\,x\,tg\,\theta}{d\theta} d\theta = x \frac{d\,tg\,\theta}{d\theta} = x \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$⊛ = 2k \int \frac{\lambda \cancel{x}\, d\theta}{x^{\cancel{2}}} \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} = \frac{2k\lambda}{\cancel{x}} \int_0^{\theta_0} \cos\theta\, d\theta = **$$

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\ell}{2x}\right)$$

$$** = \frac{2k\lambda}{x} \int_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{\ell}{2x}\right)} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2k\lambda}{x} \left[\sin\theta\right]_0^{\theta_0} = \frac{2k\lambda}{x} \sin\left(\theta_0\right)$$

$$\sin\theta_0 = \frac{\ell}{2r_0} = \frac{\ell}{2x} \cos\theta_0$$

$$\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 1$$

$$\frac{l^2}{4x^2}\cos^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 1$$

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1\Big/\left(\frac{l^2}{4x^2}+1\right)}$$

$$\sin\theta_0 = \frac{l}{2x}\sqrt{1\Big/\left(\frac{l^2}{4x^2}+1\right)}$$

$$E = \frac{\cancel{2}k\lambda}{x}\,\frac{l}{\cancel{2}x}\sqrt{1\Big/\left(\frac{l^2}{4x^2}+1\right)} = \frac{2k\lambda}{x}\,\frac{\cancel{l}}{\cancel{2x}}\,\frac{1}{\frac{\cancel{l}}{\cancel{2x}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{l^2}}} =$$

$$= \boxed{\frac{2k\lambda}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{l^2}}}}$$

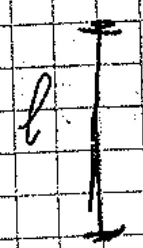
se $x \to \infty$

$$E = \frac{2k\lambda}{x\cdot\frac{2x}{l}} = \frac{2k\lambda l}{x^2\cdot 2} = k$$

legge di Coulomb

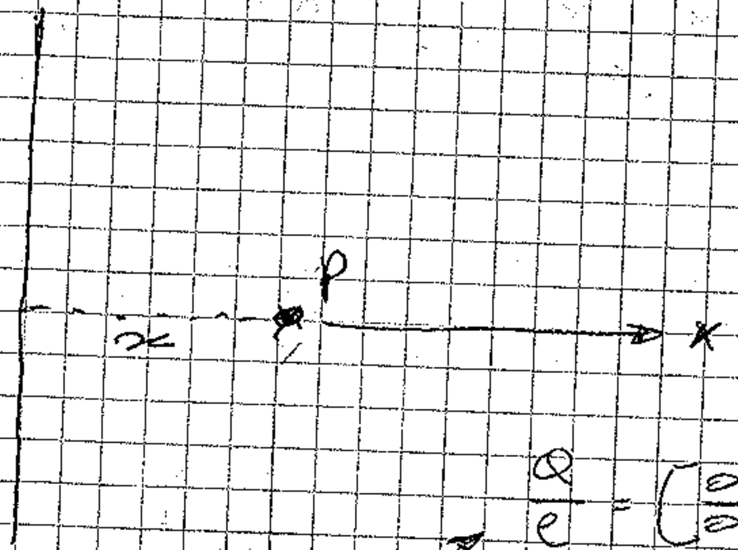
$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{l^2}}}\,\vec{i}$$

Esercizio: Calcolo campo elettrico in P



P'

(2) Calcolare campo elettrico di un filo rettilineo infinito

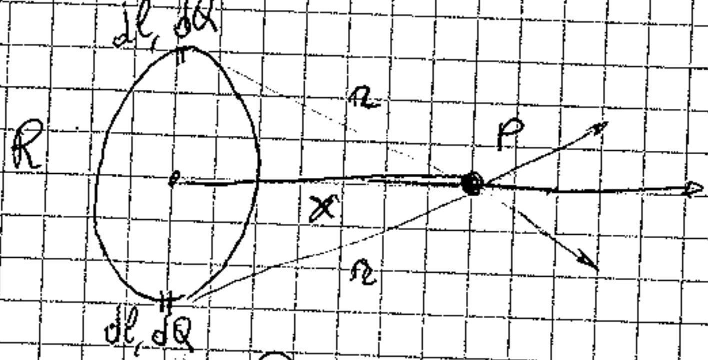


$$\frac{Q}{\ell} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \rightarrow \text{quantità finita } \lambda$$

$$\vec{E} = \lim_{\ell \to \infty} \frac{2K\lambda}{x\sqrt{1+\frac{4x^2}{\ell^2}}} = \frac{2K\lambda}{x}$$

$$\vec{E} = \frac{2K\lambda}{x}\,\vec{i}$$

(3)



simmetria ⇒ vettore $\vec{E}$ risultante sarà diretto lungo l'asse x

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} \qquad dQ = \lambda\, d\ell$$

$$dE = K\frac{dQ}{r^2}\cos\theta = K\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\cos\theta$$

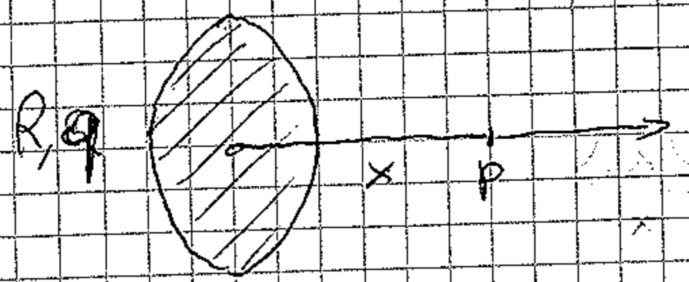
$$E = \int dE = K\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta \int d\ell = K\frac{Q}{r^2}\cos\theta =$$

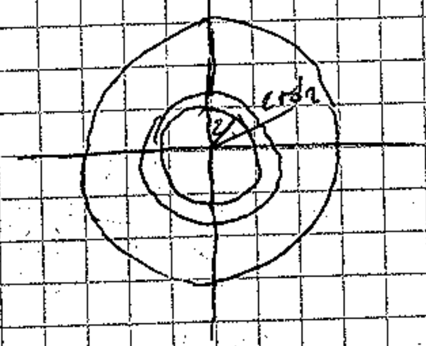
$$= K\frac{Q\,x}{r^3} = K\frac{Q\,x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{KQx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{KQx}{x^{3}} \Rightarrow \frac{KQ}{x^2}$$ Legge di Coulomb

(4) Disco pieno di raggio R carico uniformemente vogliamo calcolare campo elettrico in asse del disco a distanza x





$$dA = 2\pi r\, dr$$

$$dQ = dA\,\rho = dA\,\sigma = dA \frac{q}{\pi R^2} = \frac{q}{\cancel{\pi} R^2} 2\cancel{\pi}\, r\, dr =$$

$$= 2\frac{q r}{R^2}\, dr$$

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$dE = K \frac{x\, 2 q r\, dr}{R^2 (r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \int dE = \frac{K 2 q x}{R^2}\int_0^R \frac{r\, dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2K \frac{qx}{R^2}\int_0^R \frac{r}{x^3\left(\frac{r^2}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\, dr$$

$$\frac{r}{x} = z$$

$$= 2K\frac{q}{R^2}\int_0^R \left(\frac{r}{x}\frac{1}{\left(\frac{r^2}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dr}{x}\right) = 2K\frac{q}{R^2}\int_0^{\frac{R}{x}} \frac{z}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}\, dz$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

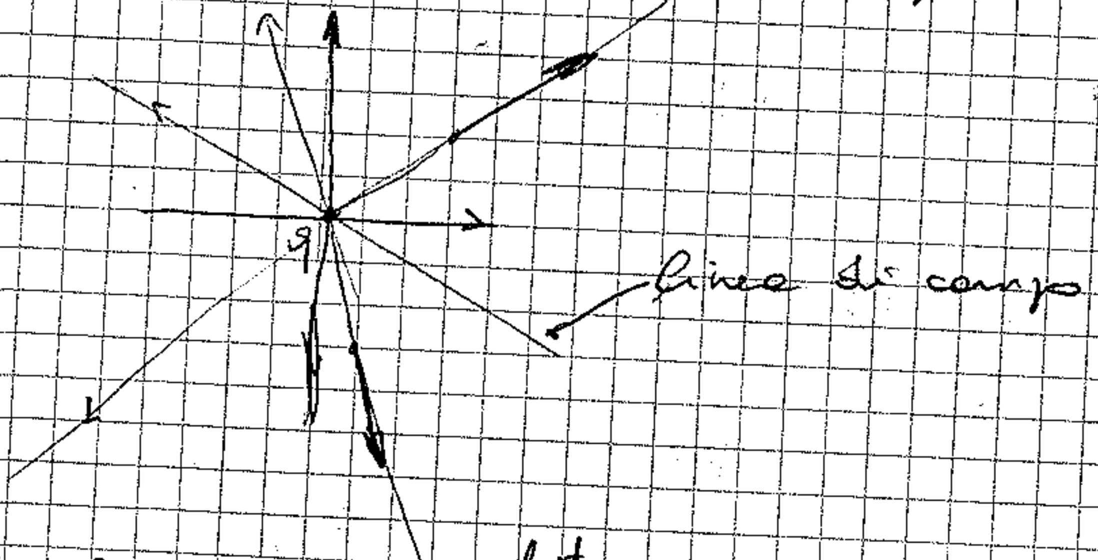
Se $x \to \infty$

$$E = \frac{2kq}{R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

Se $R \to \infty$

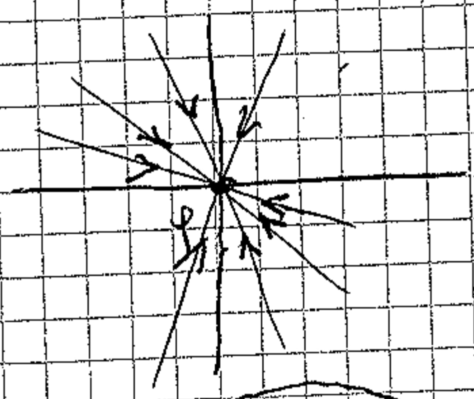
$$E = \frac{2kq}{R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) = \frac{2kq}{R^2}$$

Si definiscono linee di campo (o linee di forza del campo) linee che sono in ogni punto dello spazio tg al campo.

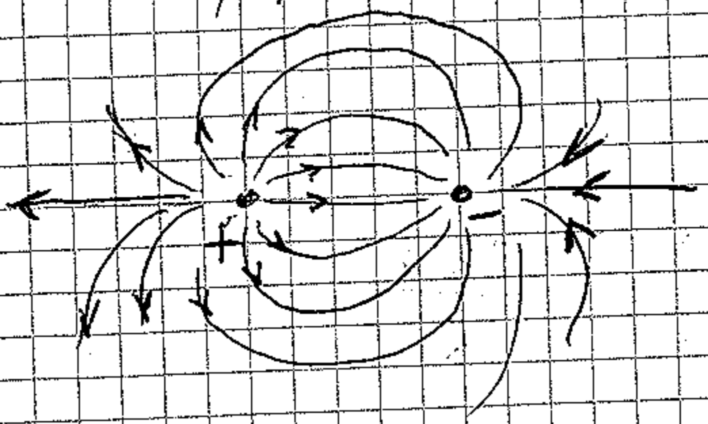


le linee di campo elettrico non si intersecano tra di loro.

le linee di campo partono dalle cariche positive e vanno alle cariche negative.



linee di campo di carica negative



Il potenziale di un campo di forze

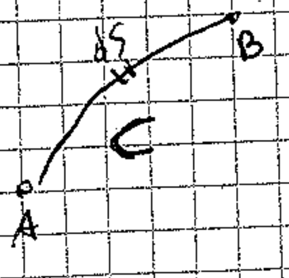
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

lavoro

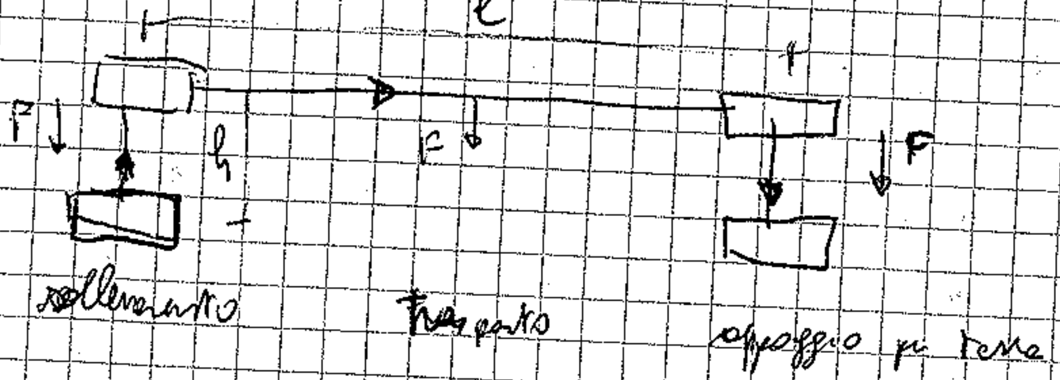
$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

se $\vec{F} \perp \vec{ds} \Rightarrow dW = 0$

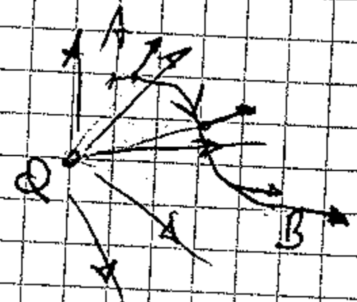


$$W = \int dW = \int_{C_{A \to B}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Persone con una valigia.



$$W = -mgh + 0 + mgh = 0$$



$$W_{AB} = \int_{C_{A\to B}} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= q_0 \int_{C_{A\to B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 T_{AB}$$

$$T_{AB} \equiv \int_{C_{A\to B}} \vec{E} \, d\vec{s}$$ tensione elettrica tra il punto A ed il punto B

Talvolta C è chiuso allora è un circuito geometrico. Se C è chiuso $\Rightarrow$

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \, d\vec{s}$$ circuitazione del campo elettrico

$$W = q_0 \oint_C \vec{E} \, d\vec{s} \Rightarrow W = q_0 \mathcal{E}$$

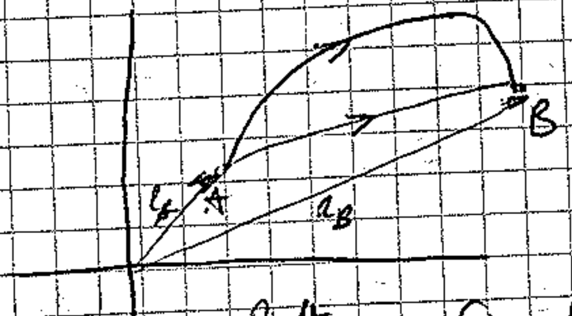
In generale il lavoro da $a \to b$ è $\neq 0$

Se il lavoro lungo una linea chiusa è
0 allora il campo è conservativo
se $W = q_0 \mathcal{E} \neq 0$ allora il campo è non conservativo

In generale il campo elettrico è conservativo
" " magnetico non è conservativo
" " elettrico in condizioni dinamiche non è conservativo

$$\boxed{\int_{C_{A\to B}} E\,ds = \frac{W_{AB}}{q_0} = V_A - V_B}$$

Interessiamoci del caso in cui il lavoro non dipende dal percorso ma da punto di partenza e di arrivo.



$V_A = V(\vec{r}_A)$
↳ potenziale del campo elettrico (in A)

$W_{AB} = q_0 V_A - q_0 V_B = q_0 (V_A - V_B)$
- Variazione della tensione
Variazione della tensione

$\Delta V = V_B - V_A$

$W_{AB} = -q_0 \Delta V$

$\boxed{U_A = q_0 V_A}$ energia elettrostatica

$\boxed{W_{AB} = U_A - U_B = -\Delta U} \Rightarrow W_{AB} + \Delta U = 0$

Nello spostamento ~~la particella~~ viene fatto lavoro, la particella cambia energia elettrostatica la somma tra lavoro e cambiamento di energia elettrostatica è nullo.

$W_{AB} - \Delta U = 0$ è sempre identicamente nullo

Supponiamo che la curva sia chiusa. Allora

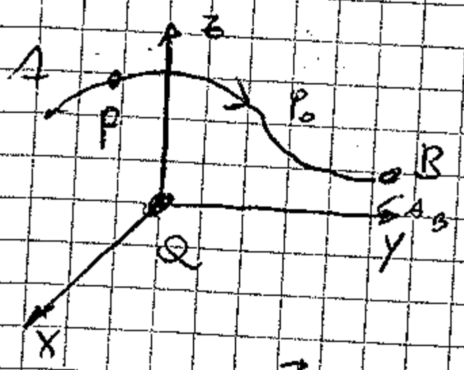
se $\Delta U = 0$ allora $W = 0$

$\Delta U = 0 \quad U_B - U_A = U_A - U_A = 0$

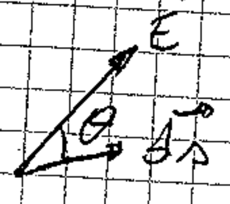
$\Downarrow$

$W_{AB} + \Delta U = 0 \Rightarrow W_{AA} + 0 = 0 \Rightarrow W = 0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ Energia del sistema si sta conservando e quindi campo elettrico è conservativo.



$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$



$$dW = q_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = K \frac{Q q_0}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{ds}$$

$$= K \frac{Q q_0}{r^{\cancel{3}2}} \cancel{r}\, ds \cos\theta = K \frac{Q q_0}{r^2} \cos\theta\, ds \quad *$$

$\cos\theta\, ds = dr$

$* \quad K \frac{Q q_0}{r^2} dr$

$$\boxed{W_{AB}} = \int_{C\,A\to B} K\frac{Q q_0}{r^2}\,dr = K Q q_0 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = K Q q_0 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} =$$

$$= \boxed{K\frac{Q\,q_0}{r_A} - K\frac{Q q_0}{r_B}}$$

definiamo $V_A = K\dfrac{Q}{r_A}$ e $V_B = K\dfrac{Q}{r_B}$

quindi $V(r) = K\dfrac{Q}{r} + \text{cost}$

$$V(r_A) - V(r_B) = K\frac{Q}{r_A} \cancel{+\text{cost}} - K\frac{Q}{r_B} \cancel{-\text{cost}} =$$

$$= K\frac{Q}{r_A} - K\frac{Q}{r_B}$$

cost è dovuta al fatto che il lavoro è stato ~~calcolato~~ introdotto come termine differenziale

cost dice che il potenziale del campo elettr. all'infinito è cost. (D'altra parte formula di Coulomb dice che all'infinito il ~~potenziale~~ campo è 0)

Se poniamo cost = 0 allora anche il potenziale all'infinito è nullo.

Quindi posto ciò:

$$\boxed{V(r) = \frac{KQ}{r}}$$

$$\boxed{U(r) = K\frac{Q q_0}{r}}$$

(8)

$$W_{A(r)} = \frac{KQq_0}{r_A} - \frac{KQq_0}{r} = q_0 V(r_A) - q_0 V(r)$$

$$\begin{cases} dW = -q_0\, dV \\ dW = q_0 \vec{E}\, \vec{ds} \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_0 \vec{E}\, \vec{ds} = -q_0\, dV}$$

$$\boxed{\vec{E} \cdot \vec{ds} = -dV} \qquad \vec{E} = -\frac{dV}{ds} \Longrightarrow$$

$\vec{E} = -\text{grad } V$ oppure $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

$$\text{grad} = \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \nabla \vec{V} \Longrightarrow E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ ha validità generale

Potenziale generato da una distribuzione di cariche discrete

$$V(\vec r) = K \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec r - \vec r_i|}$$

$\vec r_i$ individua la carica

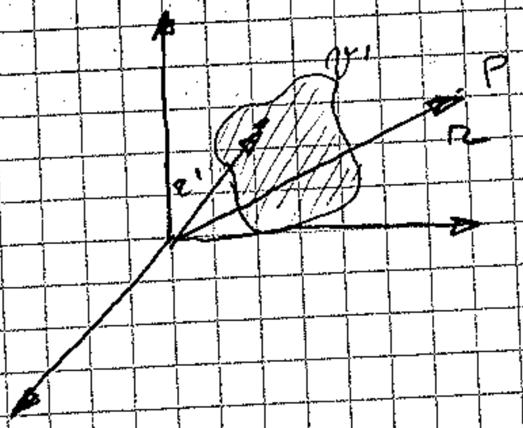
$\vec r$: individua il luogo dove voglio conoscere la funzione potenziale

Scrivo queste formule perché suppongo che valga il principio di sovrapposizione degli effetti.

Caso del continuo

$$\boxed{V(\vec r) = K \int_{V'} \frac{\rho(\vec r')\, dV'}{|\vec r - \vec r'|}}$$

volume



$E = -\vec\nabla V$ se si può integrare il campo elettrico è conservativo, se non ammette soluzione allora il campo non è conservat.

Si può verificare se un campo elettrico

è conservativo con una procedura veloce? (

Utilizziamo il rotore (rot)

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{j}\left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Se ~~il~~ $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ il campo elettrico è conservativo.

Se $\exists$ il potenziale allora $E_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \ldots$

~~Sostituiamo~~

sostituiamo nel rotore

$$i\left(-\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}}\right) + \vec{j}\left(\quad\right) + \vec{k}\left(\quad\right) = \vec{0}$$

Se $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \vec{E}$ è conservativo

Verifica della conservabilità del campo coulombiano

$$\vec{E}_{*} = K \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{E} = K \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$E_x = K \frac{Q\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad E_y = K \frac{Q\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad E_z = K \frac{Q\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

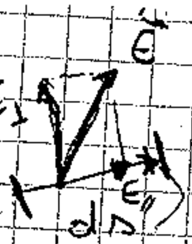
$$\text{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{KQ\cancel{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{KQy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\vec{i} + (\quad)\vec{j} + (\quad)\vec{k}$$

$$KQz \frac{\partial}{\partial y} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} KQz (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} 2y$$

$$KQy \frac{\partial}{\partial z} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} Qy (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} 2z$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = (0)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

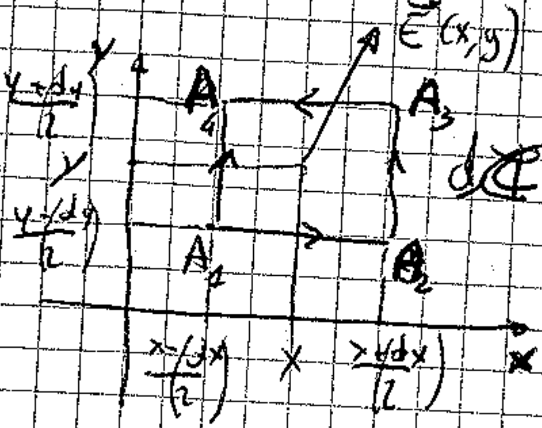
$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{E}\,d\vec{s}$$



10

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta\, ds = E_{\parallel}\, ds$$

Calcoliamo la circuitazione per un circuito infinitesimale chiuso.



$d\mathcal{C}$, $d\mathcal{A}$

$$d\mathcal{C} = 2(dx+dy)$$

$$d\mathcal{A} = dx\,dy$$

$$d\mathcal{E} = \oint_{d\mathcal{C}} \vec{E}\,d\vec{s} = \int_{A_1 A_2} \vec{E}\,d\vec{s} + \int_{A_2 A_3} \vec{E}\,d\vec{s} + \int_{A_3 - A_4} \vec{E}\,d\vec{s} + \int_{A_4 - A_1} \vec{E}\,d\vec{s} =$$

$A_1\left(x-\frac{dx}{2},\ y-\frac{dy}{2}\right)$ $\qquad$ $A_2\left(x+\frac{dx}{2},\ y-\frac{dy}{2}\right)$

$A_3\left(x+\frac{dx}{2},\ y+\frac{dy}{2}\right)$ $\qquad$ $A_4\left(x-\frac{dx}{2},\ y+\frac{dy}{2}\right)$

$$d\mathcal{E} = E_x\left(x, y-\frac{dy}{2}\right)dx + E_y\left(x+\frac{dx}{2}, y\right)dy - E_x\left(x, y+\frac{dy}{2}\right)dx +$$
$$- E_y\left(x-\frac{dx}{2}, y\right)dy =$$

Richiamo: $f(t) \simeq f(t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_0}(t-t_0)$ Taylor

$dt = t - t_0 \qquad t = dt + t_0$

$f(t_0+dt) \simeq f(t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_0} dt$

$$\boxed{f(t+dt) \simeq f(t) + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt}$$

$$d\mathcal{E} = \left[\cancel{E_x(x,y)} + \frac{\partial E_x(x,y)}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right)\right] dx +$$

$$+\left[\cancel{E_y(x,y)} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right] dy +$$

$$-\left[\cancel{E_x(x,y)} + \frac{\partial E_x(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right] dx +$$

$$-\left[\cancel{E_y(x,y)} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial x}\left(-\frac{dx}{2}\right)\right] dy =$$

$$= -\frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{dx\,dy}{2} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{dx\,dy}{2} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{dx\,dy}{2} +$$

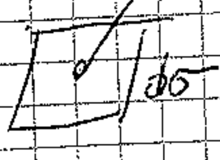
$$+\frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{dx\,dy}{2} =$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial E_x}{\partial y}\,dx\,dy = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$d\mathcal{E} = \oint_{d\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{s} = \left(-\frac{\partial E_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial x}\right) dx\,dy =$$

$$= (\mathrm{rot}\,\vec{E})_z\, dx\,dy = (\mathrm{rot}\,\vec{E})_z\,(d\vec{\sigma})_z$$

$$d\sigma = dx\,dy$$



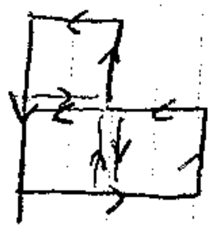
$$d\vec{\sigma} = d\sigma\,\vec{n}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\sigma)_z$$

Per curva tridimensionale infinitesimale di area $d\vec{\sigma}$

$$d\mathcal{E} = \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{\sigma}$$

Se il circuito è finito lo devo scomporre in tanti circuiti elementari

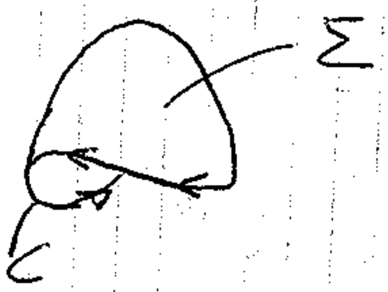


sommo i circuiti parziali attorno il circuito grande perché il circuito interno non contribuisce.

Quindi la circuitazione di un circuito finito è la somma di tanti circuiti elementari.

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = \\ \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\, d\vec{s} \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{\sigma}}$$



Se il campo è conservativo $\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ quindi la circuitazione lungo un circuito chiuso è $\vec{0}$.

Conservabilità del campo elettrico in condizioni stazionarie $\iff$ circuitazione lungo un circuito chiuso è $0 \iff$ rotore $= 0$.

La conservabilità del campo elettrico si può scrivere così

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

oppure se

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$$

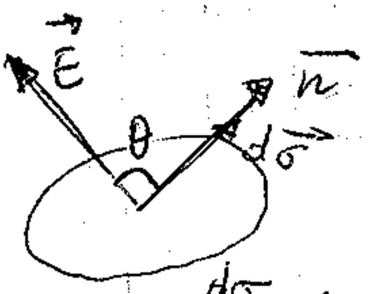
~~PRIMA~~ PRIMA EQ. di MAXWELL (Teorema di Gauss).

Ricordiamo che

$$\vec{E} = \cancel{k}\,\frac{c}{r^m}\vec{u}_r \qquad c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ ,\ m = 2$$

$$V = \frac{c}{(m-1)\,r^{m-1}}$$

Consideriamo un elemento orientato di superficie

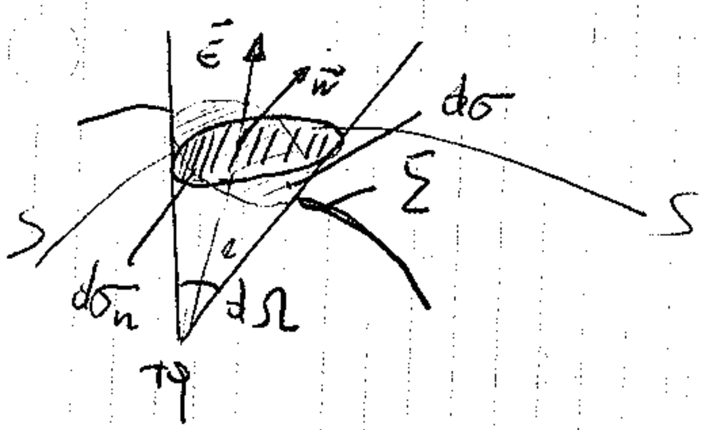


$$d\vec{\sigma} = \vec{n}\, d\sigma$$

il flusso elementare di $\vec{E}$ attraverso l'area $d\sigma$ è definito

$$d\phi = \vec{E}\, d\vec{\sigma} = \vec{E}\cos\theta\, d\sigma =$$

$= E_n \, d\sigma = E \, d\sigma_n$ dove $d\sigma_n = d\sigma \cos\theta$ (1[illegible]

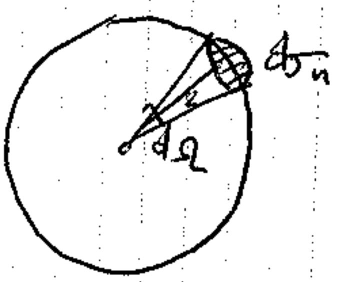


Consideriamo una carica q, una superficie Σ che racchiude la carica q.
Considero un elementino di area $d\sigma$ della superficie.

Considero anche il campo elettrico passante per il centro di dS e uscente da q e disegno l'area $d\sigma_n$ (tratteggiata)

$$d\phi = \vec{E} \, d\vec{\sigma} = K \frac{q}{r^m} \vec{u}_r \cdot \vec{n} \cdot d\sigma =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^m} \cos\theta \, d\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^m} d\sigma_n$$



angolo solido

$$d\Omega = \frac{d\sigma_n}{r^2}$$

$$d\sigma_n = r^2 \, d\Omega$$

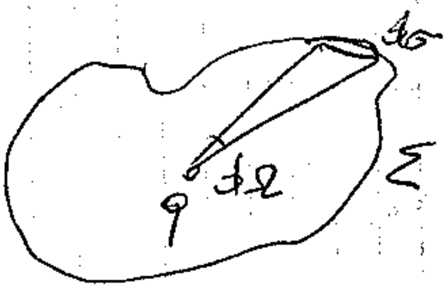
$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{m-2}} d\Omega$$

Se $m=2$ $\qquad d\phi = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

Poiché siamo in uno spazio 3D e la legge di Coulomb prende il raggio elevato 2 (numero intero esatto) si ha che:

$$d\phi \propto d\Omega \Rightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega$$

Consideriamo una superficie chiusa ed 1 carica al suo interno

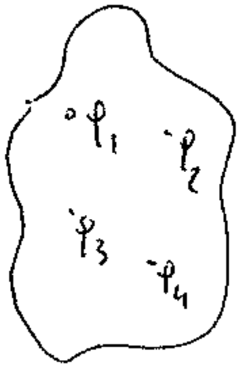


$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega$$

$$\phi = \int d\phi = \int_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega =$$

$$\frac{q}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}\left(\cancel{4\pi} - 0\right) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

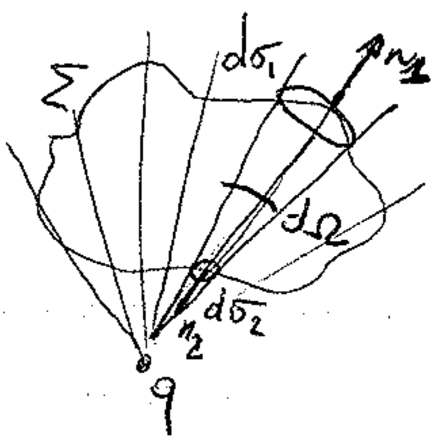
$$\boxed{\phi = \frac{q}{\epsilon_0}}$$ Teorema di Gauss.



$$\boxed{\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Teorema di GAUSS.

Se consideriamo una superficie Σ e consideriamo una carica esterna il flusso attraverso la superficie come viene?



$d\sigma_1 \neq d\sigma_2$ ma sono entrambe infinitesime

~~flusso~~ $d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega$

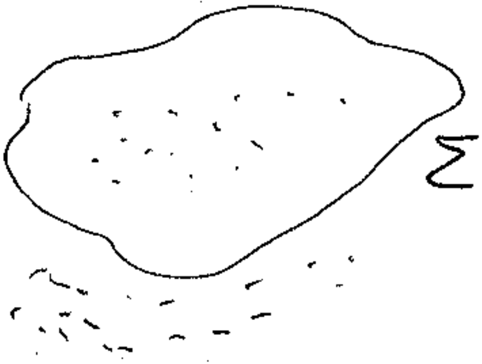
$d\phi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega$

$d\phi_2$ è negativo perchè $\vec{E}$ è antiparallelo ad $\vec{n}$

$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 0$

il flusso del campo elettrico di una carica esterna ad una superficie chiusa attraverso la superficie stessa è nullo

Per il principio di sovrapposizione il flusso di un insieme di cariche esterne ad un superficie chiusa attraverso la superficie stessa è nulla.



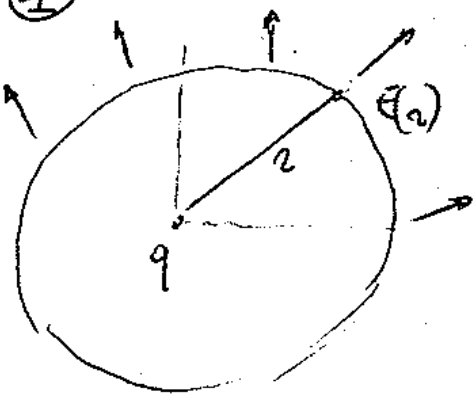
$$\boxed{\phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

1ª equazione di Maxwell

Teorema di Gauss.

Applicazioni

① Noto teorema di Gauss trovare legge di Coulomb.



il campo è radiale quindi il campo elettrico deve avere la stessa intensità per tutti i punti a raggio r

Il teorema di Gauss dice che

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

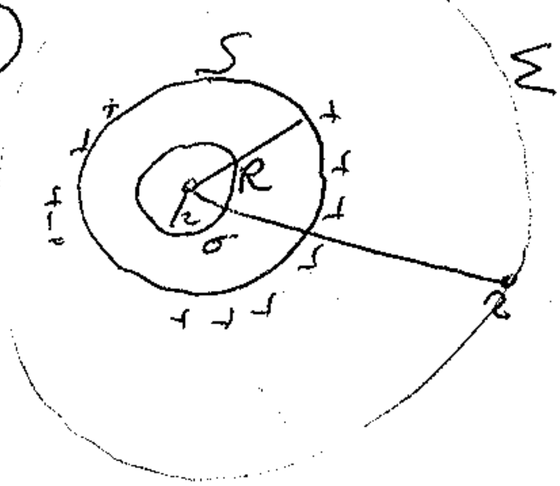
Poiché è simmetrico rispetto a q

$$\phi = \oint_\Sigma \vec{E}\, d\sigma = \oint_\Sigma E\, d\sigma = E \int_\Sigma d\sigma =$$

$$= E\, 4\pi r^2$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

~~legge di~~ campo Coulombiano



Se il punto è a distanza $r>R$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

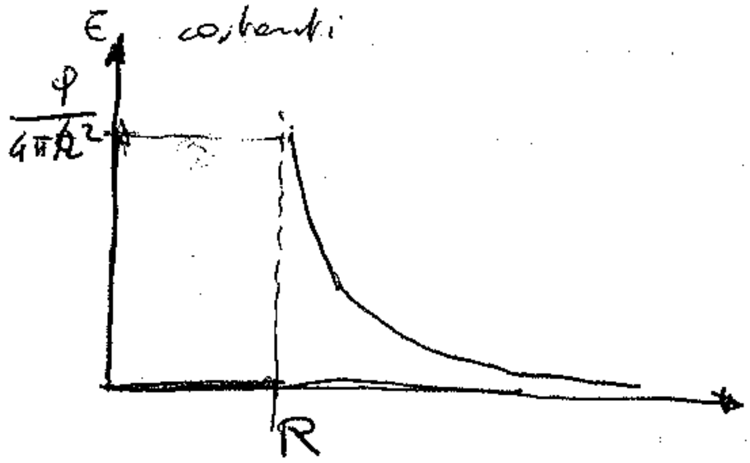
$$\phi = E\, 4\pi r^2$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

Se la carica è interna ~~per il teorema~~ supponiamo ci sia una superficie σ di raggio $r<R$ il flusso è nullo per il teorema di Gauss

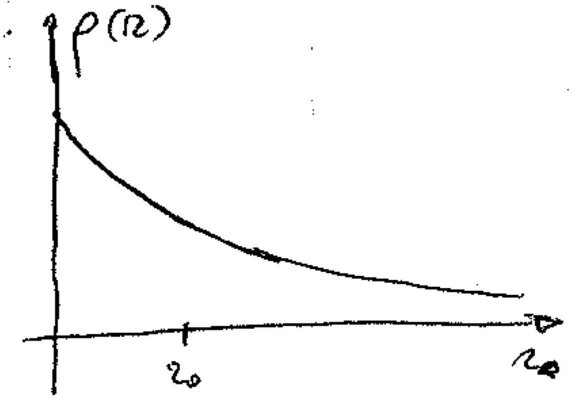
$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{teorema di Gauss} \\ \phi = E 4\pi r^2 & \phi = \oint_\sigma E\, d\sigma \end{cases}$$

$$E \underbrace{4\pi r^2}_{\text{costanti}} = 0 \Rightarrow E = 0$$



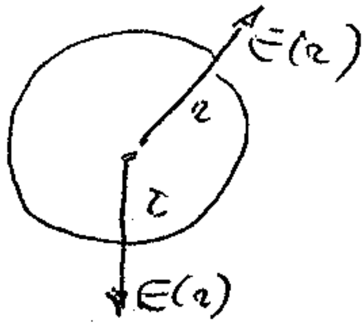
Questa applicazione è la gabbia di faraday

8/10/2003



$$\rho(r) = A\,(r+r_1)^{-m}$$

A, r_1, m note



$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(r)\, dV = Q$$

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

solo se c'è simmetria radiale

$$\int_0^{\infty} \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = Q$$

comportamento asintotico funzione integranda

$$A\, r^{-m}\, 4\pi r^2 = 4\pi A\, r^{2-m} \quad \cdots -2+m > 1$$

$m > 3$

$$\begin{cases} \phi = 4\pi r^2 \cdot E \\ \phi = \dfrac{Q}{\epsilon_0} = \dfrac{\int_0^R \rho(w)\, 4\pi w^2\, dw}{\epsilon_0} \end{cases}$$

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho(w)\, 4\pi w^2\, dw$$

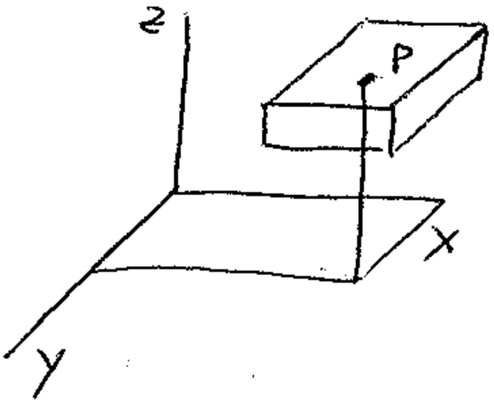
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \int_0^R \cancel{4\pi}\, \rho(w)\, w^2\, dw}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} A \int_0^R (r_1 + w)^{-m} w^2 \, dw$$

Se siamo lontani dal centro (della particella quantistica) il campo è coulombiano e quindi non siamo in grado di capire se la particella è puntiforme o meno.

Teorema di Gauss in forma differenziale.

Scelgo superficie di Gauss infinitesimale



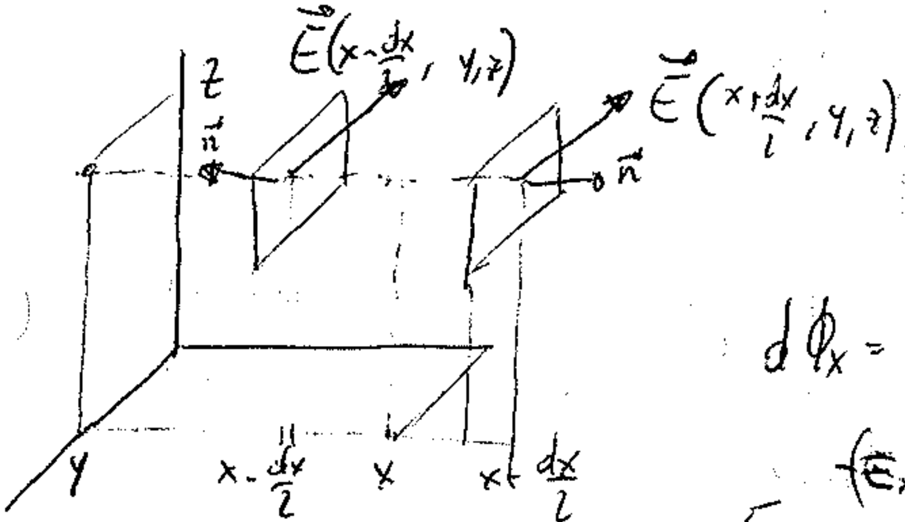
$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$d\Sigma = 2\,(dy\,dz + dx\,dz + dx\,dy)$$

$$dq_{int} = \rho_{(P)}\, dV$$

$$d\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z$$



$$d\phi_x = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})\,dy\,dz\,\vec{i}$$

$$- E_x\left(x - \frac{dx}{2}\right) dy\,dz =$$

$$= \left[E_x\left(x + \frac{dx}{2}\right) - E_x\left(x - \frac{dx}{2}\right)\right] dy\,dz$$

Sappiamo che $f(x+dx) \simeq f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$

$$E_x\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right) \simeq E_x(x,y,z) + \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$E_x\left(x-\frac{dx}{2}, y, z\right) \simeq E_x(x,y,z) - \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$d\phi_x = \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} dx\, dy\, dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV$$

$$d\phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

$$d\phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) dV$$

Ricordiamo che la $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

quindi:

$$d\phi = \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, \cancel{dV} = \frac{\rho\, \cancel{dV}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Se conosciamo la ρ si può risolvere l'equazione differenziale e si trova il campo elettrico.

16

Gauss (I eq. Maxwell) $\oint_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

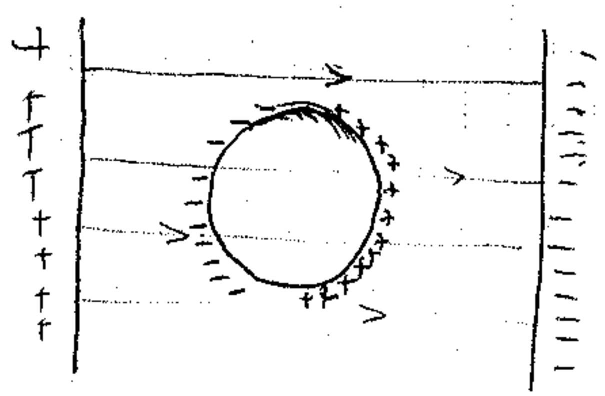
Conservativo $\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla V$] $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ Poisson

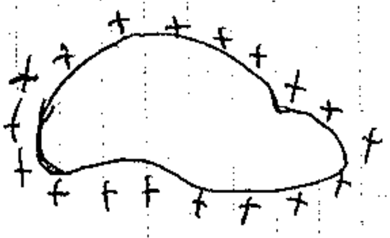
$$\text{div grad } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = \nabla^2 V = \Delta V$$

Legge di Gauss è valida anche se cariche sono in moto
La parte conservativa vale solo se le cariche sono ferme.

Prendiamo un materiale conduttore. Un teorema di Gauss afferma che le cariche tendono a disporsi sulle superficie di un conduttore



CONDENSATORE



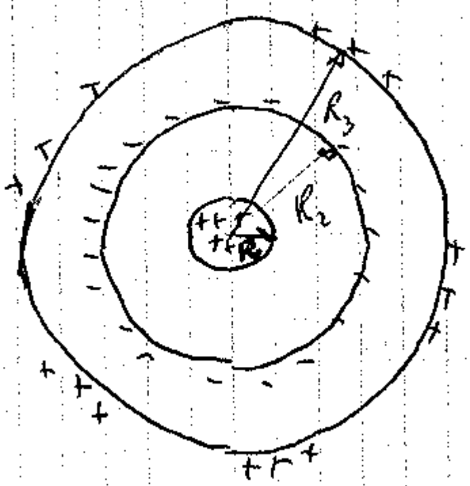
q

Supponiamo che tutto il conduttore abbia potenziale V

Si definisce capacità: $\frac{q}{V} = C$

$C = [F]$ Farad $\qquad 1F = \frac{C}{\frac{Nm}{C}} = \frac{1}{Nm}$

Consideriamo



Guscio sferico raggio interno R_2 raggio esterno R_3

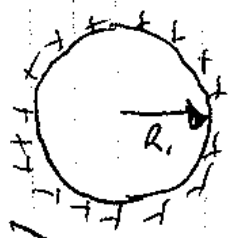
Interno sfera carica di raggio R_1

Cariche negative si spostano verso la superficie interna, cariche ~~negati~~ positive verso l'esterno.

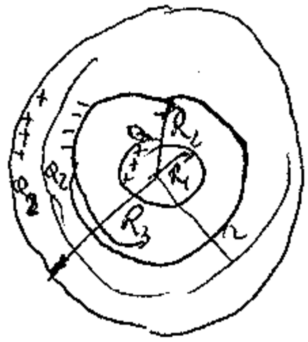
Il guscio si polarizza.

Dobbiamo trovare la capacità di questi due sistemi.

Solo sfera di raggio R_1

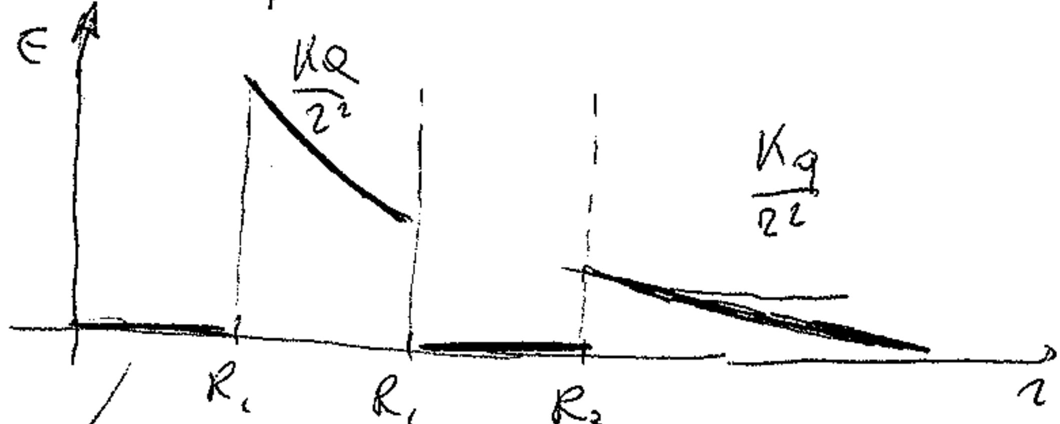


$$C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}} = 4\pi\epsilon_0 R_1$$



$Q_2 = Q \Rightarrow$ perché campo $\left(\text{per } r\right.$ deve essere nullo e quindi anche il flusso

Scriviamo campo elettrico nelle varie regioni dello spazio:



Tra $O - R_1$

Campo è nullo per Teorema Gauss

$R_1 - R_2$

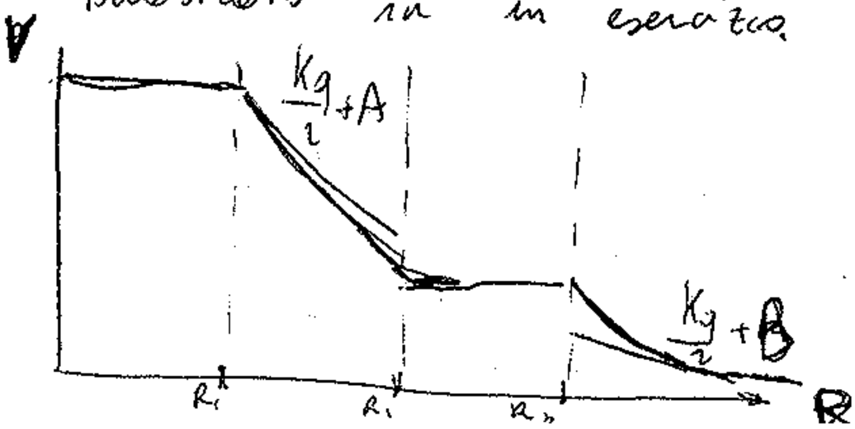
Dimostrato in un esercizio

$R_2 - R_3$

All'interno del conduttore deve essere nullo.

$R_3 - R_4$

Dimostrato in un esercizio.



$$E = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Vogliamo che il potenziale sia funzione continua.
calcolo costanti A e B

$$V(R_3) = V(R_2)$$

$$V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\frac{Kq}{R_3} = \frac{Kq}{R_1} + A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Kq}{R_3} - \frac{Kq}{R_2} =$$

$$= Kq\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$0 - R_1$

$$V = \frac{Kq}{\cancel{R_1}}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_1 - R_2$

$$V = Kq\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_2 - R_3$

$$V = Kq\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_3 - \infty$

$$V = \frac{Kq}{r}$$

$$V_1 - V_2 = Kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{q}{K\cancel{q}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}} =$$

capacità dei due sistemi

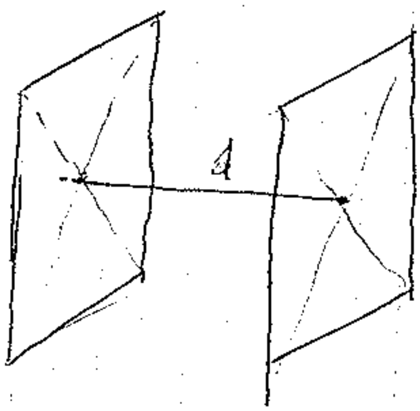
$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }\right)}$$

se $R_2 \to \infty \Rightarrow C = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} =$

$= 4\pi\epsilon_0 R_1$

si riconduce all'esercizio nel box

<u>Esercizio</u>



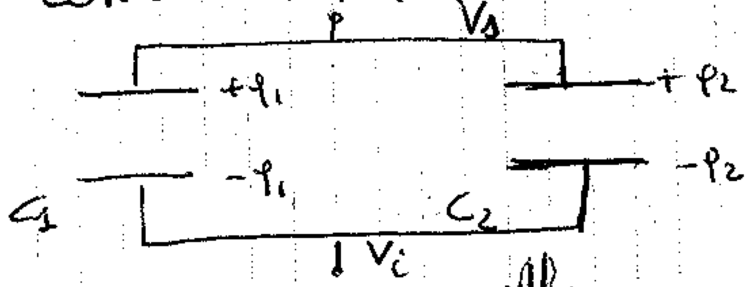
$C = \frac{Q}{\Delta V} = ?$

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$

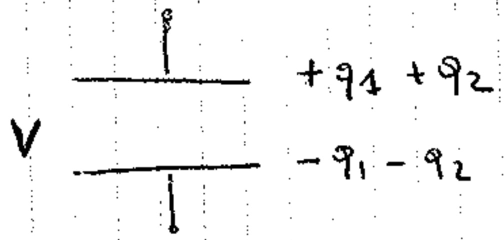
$C = \frac{Q}{\frac{Q d}{A \epsilon_0}} = \frac{A\epsilon_0}{d}$

CONDENSATORI

Parallelo



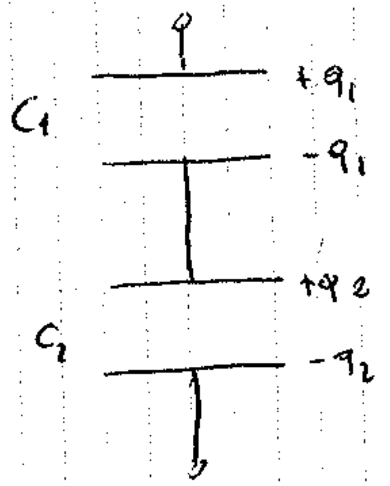
$\Downarrow$



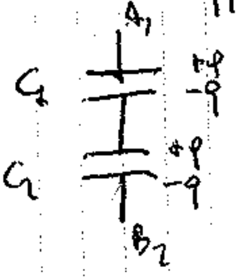
$$C_1 = \frac{q_1}{V} \qquad C_2 = \frac{q_2}{V}$$

$$C_{eq} = \frac{q_1+q_2}{V} = C_1 + C_2$$

Serie



Se $q_1 = q_2$



$C_1 = \frac{q}{V} \Rightarrow q = C_1 V_1 \qquad V_1 = \frac{q}{C_1}$

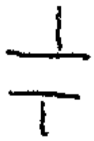
$C_2 = \frac{q}{V} \Rightarrow q = C_2 V_2 \qquad V_2 = \frac{q}{C_2}$

$$V = V_{A_1} - V_{B_2} = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

$$V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow \frac{V}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

BILANCIO ENERGETICO

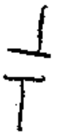
Consideriamo condensatore inizialmente scarico



$V_0 = 0$, $t = 0$

carichiamo il condensatore

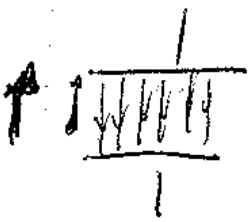
$+q$ $-q$



$V_f \neq 0$, $t_f = t_{finale}$

Ad un istante generico

dq'



$+q'$ $-q'$ $t = t'$

Carica positiva fa percorso alla rovescia rispetto al campo elettrico, devo fare lavoro contro il campo.

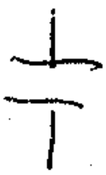
Il lavoro speso per caricare il condensatore è detto energia elettrostatica.

Esempio:

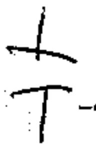
istante t' all'armatura sup. q'

" $t'+dt'$ " " " $q'+dq'$

q' $-q'$



$t = t'$



$q'+dq'$ $-q'-dq'$

$t = t'+dt'$

$$dW' = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq'$$

$$W = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{1}{C}\int_0^q q'\,dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Vq = U$$

Richiamo

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad V = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

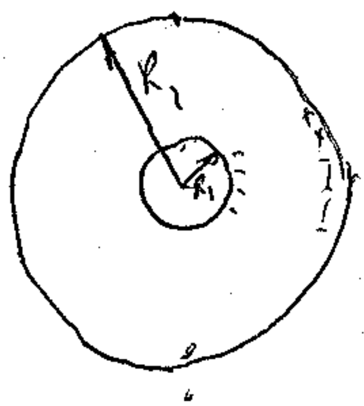
$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{\rho^2}{\epsilon_0^2}d^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)^2 A d =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

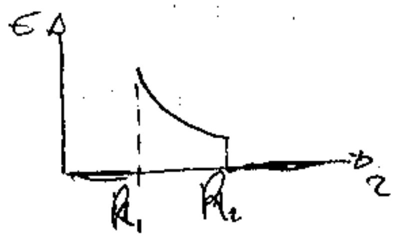
$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{U}{\mathcal{V}} \qquad U = u\mathcal{V}$$

$$U = \int_{\mathcal{V}} u\,d\mathcal{V}$$

Esercizietto:



$$E = \frac{q}{4\pi r^2}$$



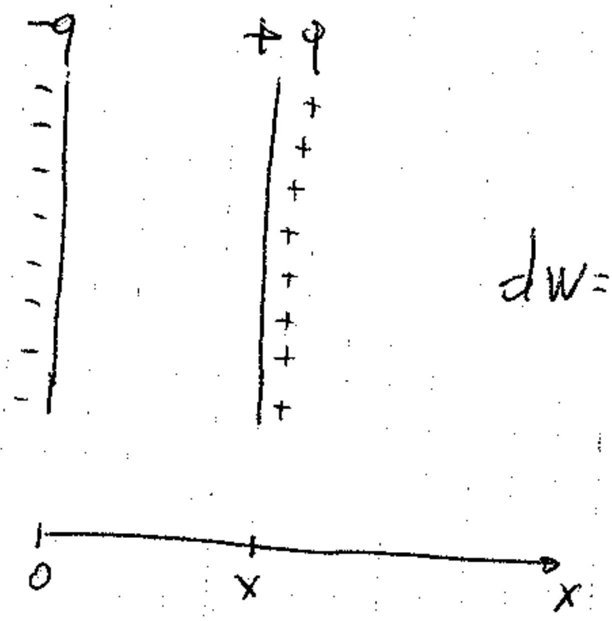
$$U = \int_{\mathcal{V}} u\,d\mathcal{V} = \int_{R_1}^{R_2} u\,4\pi r^2\,dr =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\epsilon_0}\frac{q^2}{\epsilon_0^{\cancel{2}}16\pi^{\cancel{2}}}\cancel{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^{\cancel{4}}}\cancel{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot -\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Consideriamo un condensatore piano



$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}\,x$$

$$dW = dU = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}\,dx$$

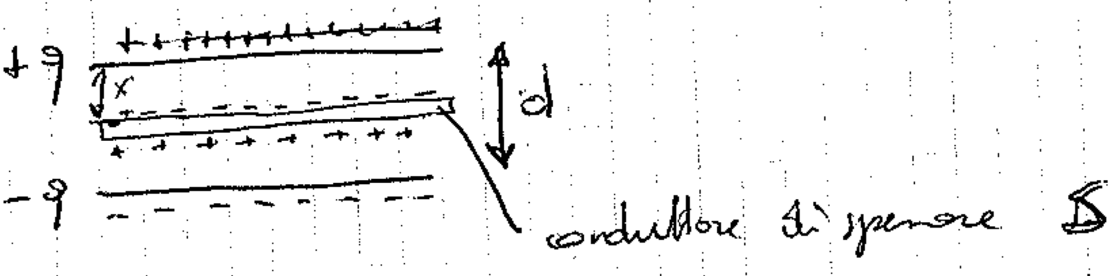
$$dW = \cancel{d}F\,dx$$

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$ pressione elettrostatica

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

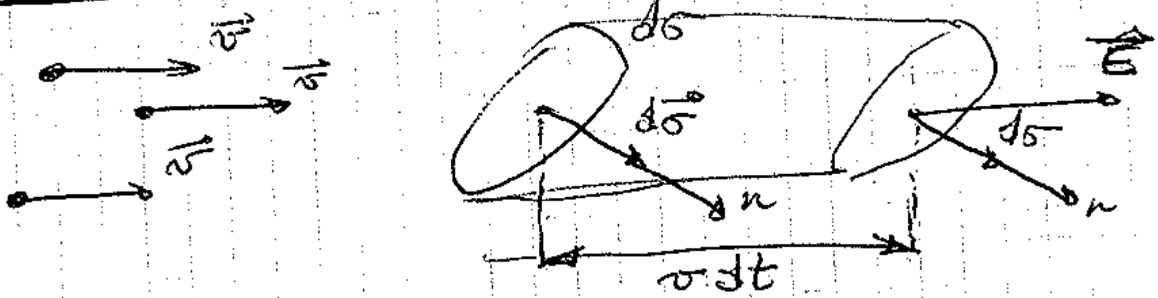
Esercizio



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 A_1} + \frac{d-x-s}{\varepsilon_0 A_2} = \frac{d-S}{\varepsilon_0 A_2}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-S}$$

Cariche in moto



$$dV = \vec{v}\,dt\,d\sigma$$

$$dq = \rho\,dV = eN\,dV$$

N: n° particelle per unità di V

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = eN\vec{v}$$

↳ densità di corrente elettrica

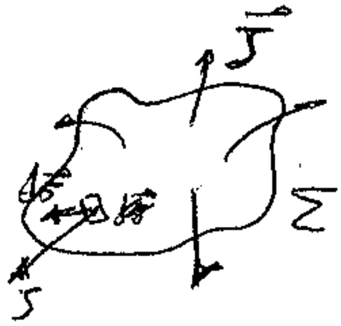
$$dq = \rho\,\vec{v}\,dt\,d\vec{\sigma} = \vec{J}\,d\vec{\sigma}\,dt$$

$$\frac{dq}{dt} = \vec{J}\,d\vec{\sigma} \qquad \frac{dq}{dt} = dI$$

$$dI = \vec{J}\, d\vec{\sigma}$$

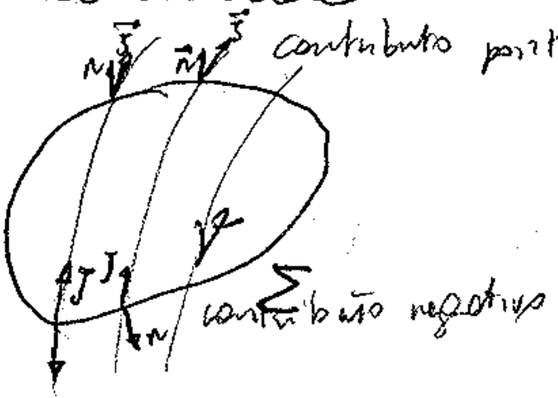
$$i = \int_\Sigma \vec{J}\, d\vec{\sigma}$$

flusso del vettore $\vec{J}$ attraverso la superficie Σ



$$q = \int_V \rho\, dV$$

Considerano



Se sorgente è all'interno ci sono contributi positivi sempre (su tutto Σ).
il flusso è quindi positivo

~~Se sorgente è esterna~~

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t}$$ carica che fluisce nel volume nell'unità di tempo

$$\oint_S J\, d\sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$$

Teorema Gauss in Analisi II dice

$$\boxed{\oint_S \vec{A}\, d\vec{\sigma} = \int_{V} \vec{\nabla}\vec{A}\, dV}$$

$$\oint_V \vec{\nabla}\vec{J}\, dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV$$

$$\int_V \vec\nabla \vec J \, dV = \int \left(-\frac{\partial}{\partial t}\rho\right) dV$$

$$\int_V \left(\vec\nabla\vec J + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\vec J = 0}$$

equazione di continuità (la carica si conserva nel tempo)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV = -\int_V \vec\nabla\vec J \, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q = -\oint_S J \, d\sigma$$

se $S \to \infty \Rightarrow J \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} q = 0$$

si vede che la carica si conserva nel tempo

---

l libero cammino medio

τ tempo medio che impiega la carica tra un urto e l'altro

$a = \frac{F}{m}$ accelerazione dell'elettrone tra due urti

$$\vec a = -\frac{e\vec E}{m} = -e\frac{\vec E}{m}$$

$$\vec v = \vec a \tau = -\frac{e\tau}{m}\vec E$$ velocità di deriva

$$\vec{J} = -Ne\vec{v} = Ne^2\tau\,\frac{\vec{E}}{m}$$

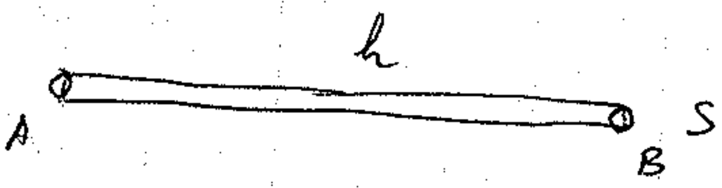
$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}$$ conducibilità elettrica

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$ resistività elettrica

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{E} = \rho\vec{J}$$

Conduttore di lunghezza h e sezione S



$$V = E\,h \qquad i = j\,S$$

$$E = \rho j = \rho\frac{i}{S}$$

$$\boxed{V = \rho\frac{h}{S}\,i}$$ legge di Ohm

$$R = \rho\frac{h}{S}$$ resistenza

$$G = \frac{1}{R}$$ conduttanza

$$p = |\vec F \vec v| = eEv$$

$$p_V = NeEv = \frac{Ne^2\tau}{m}E^2 = \sigma E^2 =$$

$$= \rho j^2$$

$$dP = p_V \, dV \qquad dV = S\,dh$$

$$dP = p_V \, S\,dh = \rho j^2 S\,dh = \rho$$

Poiché $\vec v \parallel \vec S$ si ha che $i = Sj$

$$dP = \rho \frac{dh}{S} i^2 =$$

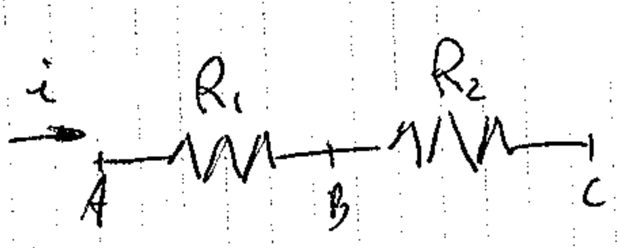
$$P = \int dP \Rightarrow P = \rho \frac{h}{S} i^2 = \frac{V}{\cancel{i}} i^{\cancel{2}} = Vi$$

$$= Ri^2 = V^2/R$$

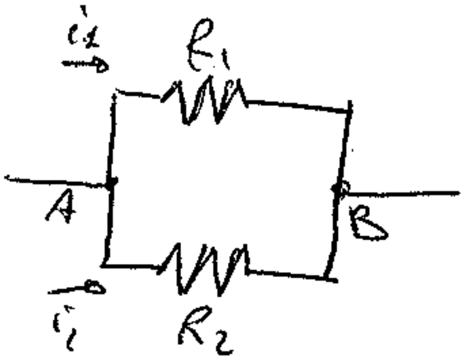
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec F d\vec x}{dt} = \vec F \vec v$$

Resistenze in serie e parallelo

Serie



$$\begin{cases} V_A - V_B = R_1 i \\ V_B - V_C = R_2 i \end{cases} \qquad V_A - V_C = (R_1 + R_2)\, i$$



Parallelo

$$\begin{cases} V_A - V_B = R_1 i_1 \\ V_A - V_B = R_2 i_2 \end{cases} \qquad V_A - V_B = R i$$

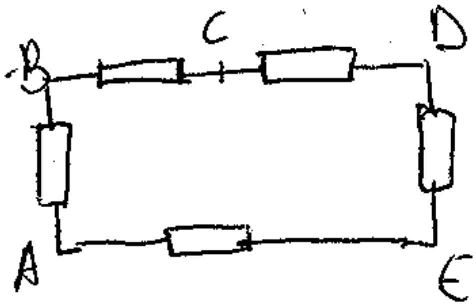
$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{V_A - V_B}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{V_A - V_B}{R_2} \end{cases}$$

Per continuità delle correnti

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i \\ i_1 + i_2 = \dfrac{V_A - V_B}{R_1} + \dfrac{V_A - V_B}{R_2} \\ i = \dfrac{V_A - V_B}{R} \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{V_A - V_B}}{R} = \frac{\cancel{V_A - V_B}}{R_1} + \frac{\cancel{V_A - V_B}}{R_2}$$

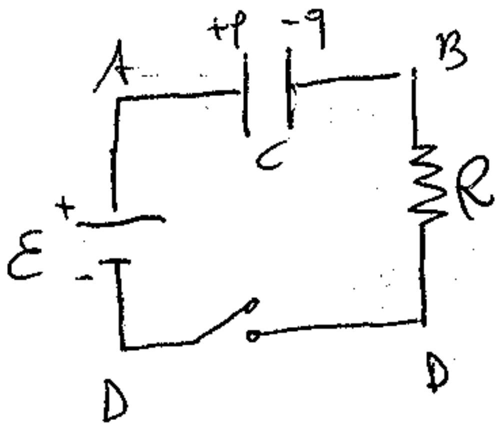
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$(\cancel{V_B}-\cancel{V_A})+(\cancel{V_C}-\cancel{V_B})+(\cancel{V_D}-\cancel{V_C})+(\cancel{V_E}-\cancel{V_D})+(\cancel{-V_E}+\cancel{V_A})=0$$

II principio di Kirchhoff

Esercizio



$q(0)=0$

$i(0)=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} V=\frac{1}{C}q \\ V=Ri \end{array}}$$

$$V_A-V_B+V_B-V_A+V_D-V_B=0$$

$$\mathcal{E}-\frac{1}{C}q-Ri=0$$

$$\mathcal{E}=\frac{1}{C}q-Ri$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}=R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q \\ q(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC} q = \dfrac{\mathcal{E}}{R} \\ q(0) = 0 \end{cases}$$ 26

$$\frac{dq}{\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{1}{Rc} q} = dt$$

$$\frac{-Rc\, dq}{-\mathcal{E}c + q} = dt \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q - \mathcal{E}c} = -\frac{1}{Rc}\int_0^t dt$$

$$\Big[\ln(q - c\mathcal{E})\Big]_0^q = \frac{1}{Rc}\Big[t\Big]_0^t$$

$$\ln|q - c\mathcal{E}| - \ln|c\mathcal{E}| = -\frac{1}{Rc} t$$

$$\left|\frac{q - c\mathcal{E}}{c\mathcal{E}}\right| = e^{-\frac{t}{Rc}}$$

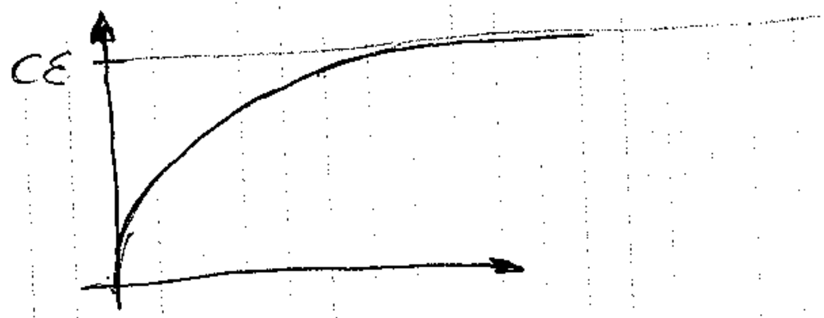
$$\left|\frac{q}{c\mathcal{E}} - 1\right| = e^{-\frac{t}{Rc}}$$

$$\frac{q}{c\mathcal{E}} - 1 = \pm e^{-\frac{t}{Rc}}$$

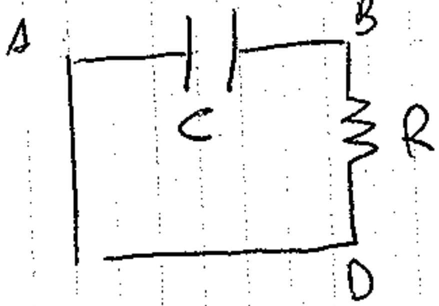
$$q = \left(1 \pm e^{-\frac{t}{Rc}}\right) c\mathcal{E}$$

Poiché $q_0 = 0$ allora

$$q = \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) C\mathcal{E}$$



<u>Esercizio</u> scarica del condensatore



$q(0) = q_0$

$$(V_A - V_D) + (V_B - V_A) + (V_D - V_B)$$

$$-\frac{1}{C} q(t) - R\,i(t) = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

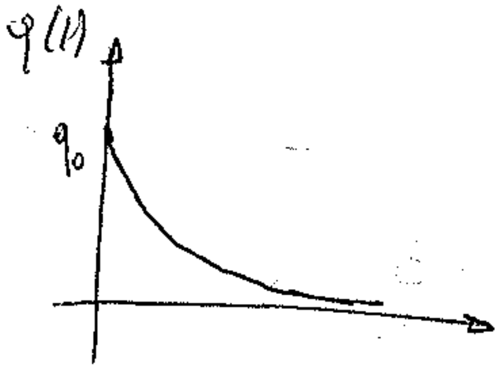
$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\lg \frac{q}{q_0} = -\frac{1}{RC}\, t$$

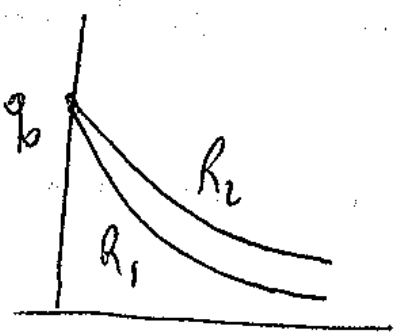
$$\frac{q}{q_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$



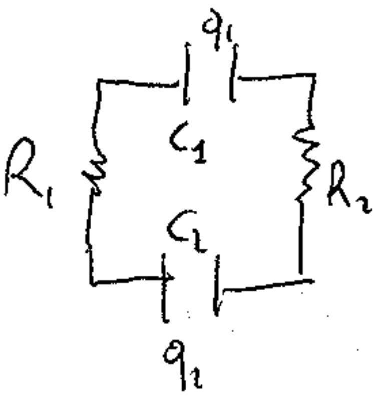
$RC = \tau$ costante di tempo

$$q(t) = q(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$R_2 > R_1$

Esercizio



$$\begin{cases} q_1(0) = q_0 \\ q_2(0) = 0 \end{cases}$$